RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES.

INTRODUCCION.

En las distintas ramas de la ingeniería se plantean problemas en que se hace necesario resolver sistemas de ecuaciones Lineales Simultáneas con un número bastante grande de ecuaciones como para resolverlo manualmente ó con calculadoras de escritorio por lo que hemos de conocer algunos métodos directos e iterativos fáciles de programar para resolverlos con ayuda de la computadora.

OBJETIVOS.

Cuando hayas terminado de estudiar esta unidad debes ser capaz de:

1. Entender y aplicar fluidamente los métodos siguientes para resolver un sistema de ecuaciones lineales simultáneas por computadora.

   <u>Métodos Directos</u>

   a. Eliminación de Gauss-Jordan
   b. Inversión de Matrices

   <u>Métodos Iterativos</u>

   a. Gauss-Seidel

2. Diferenciar las ventajas y desventajas de cada uno de los Métodos.

PROCEDIMIENTO DE ESTUDIO.

1. Estudiar el anexo de esta unidad.

2. Consultar el libro recomendado, página 206 - 220.

3. Resolver un sistema de ecuaciones por dos de los Métodos anteriores y presentarlos como autoevaluación.

Podrás solicitar examen cuando hayas resuelto el ejercicio.

Consulta el Plan General para entregar los programas correspondientes a la unidad.

ANEXO 4.

Ejemplos de solución de un sistema de ecuaciones lineales empleando los métodos iterativos de Gauss y Gauss-Seidel.

Método Iterativo de Gauss.

En este procedimiento los pasos son:

1. Rearreglar las ecuaciones del sistema.

2. Suponer valores de las incógnitas.

3. Determinar los valores calculados.

4. Comparar los valores calculados con los valores supuestos.

5. Si el valor absoluto de las diferencias de los valores calculados y los valores supuestos para todas las incógnitas es menor ó igual que la tolerancia prefijada, entonces se ha encontrado la solución (los valores calculados). En caso contrario se deben suponer un nuevo conjunto de valores y son los valores que se calcularon en la iteración anterior. El proceso se repite hasta que se cumpla la condición mencionada.

Ejemplo 1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25.21X_1 + 2.0X_2 + 3.1X_3 + 4.1X_4 &= 5.0 \\ 6.3\ X_1 + 15.2X_2 - 4.6X_3 + 7.1X_4 &= 10.0 \\ -5.7\ X_1 + 6.9X_2 + 17.7X_3 + 3.6X_4 &= 2.0 \\ 2.7\ X_1 + 7.4X_2 + 3.5X_3 + 30.2X_4 &= 11.2 \end{aligned} \quad \ldots \mathrm{I}$$

Encontrar la solución usando el método iterativo de Gauss. Tome una tolerancia $\xi = 0.001$

Solución.

1. Rearreglo de las ecuaciones del sistema.

$$X_1 = \frac{5.0}{25.21} - \frac{2.0}{25.21}X_2 - \frac{3.1}{25.21}X_3 - \frac{4.1}{25.21}X_4$$

$$X_2 = \frac{10.0}{15.2} - \frac{6.3}{15.2}X_1 + \frac{4.6}{15.2}X_3 - \frac{7.1}{15.2}X_4$$

... II

$$X_3 = \frac{2.0}{17.7} + \frac{5.7}{17.7}X_1 - \frac{6.9}{17.7}X_2 - \frac{3.6}{17.7}X_4$$

$$X_4 = \frac{11.2}{30.2} - \frac{2.7}{30.2}X_1 - \frac{7.4}{30.2}X_2 - \frac{3.5}{30.2}X_3$$

2. Se asignan valores supuestos a las incógnitas. Se toman como valores supuestos los términos independientes de cada ecuación.

$$X_1S = X_1^{\circ} = \frac{5.0}{25.21} = 0.1983$$

$$X_2S = X_2^{\circ} = \frac{10.0}{15.2} = 0.6579$$

$$X_3S = X_3^{\circ} = \frac{2.0}{17.7} = 0.1130$$

$$X_4S = X_4^{\circ} = \frac{11.2}{30.2} = 0.3709$$

3. Determinación de los valores calculados. Sustituyendo el conjunto de valores supuestos en el grupo de ecuaciones II, se determinan los valores calculados.

$$X_1C = X_1' = \frac{5.0}{25.21} - \frac{2.0}{25.21}(0.6579) - \frac{3.1}{25.21}(0.1130) - \frac{4.1}{25.21}(0.3709) = 0.071$$

$$X_2C = X_2' = \frac{10.0}{15.2} - \frac{6.3}{15.2}(0.1983) + \frac{4.6}{15.2}(0.1130) - \frac{7.1}{15.2}(0.3709) = 0.4367$$

$$X_3C = X_3' = \frac{2.0}{17.7} + \frac{5.7}{17.7}(0.1983) - \frac{6.9}{17.7}(0.6579) - \frac{3.6}{17.7}(0.3709) = -0.1550$$

$$X_4C = X_4' = \frac{11.2}{30.2} - \frac{2.7}{30.2}(0.1983) - \frac{7.4}{30.2}(0.6579) - \frac{3.5}{30.2}(0.1130) = 0.1788$$

4. Compración entre los valores calculados y los valores supuestos.

$$\left| X_1' - X_1^{\circ} \right| = \left| 0.0719 - 0.1983 \right| = 0.12640$$

$$\left| X_2' - X_2^{\circ} \right| = \left| 0.4367 - 0.6579 \right| = 0.22124$$

$$\left| X_3' - X_3^{\circ} \right| = \left| -0.1550 - 0.1130 \right| = 0.26803$$

$$\left| X_4' - X_4^{\circ} \right| = \left| 0.1788 - 0.3709 \right| = 0.19213$$

y como se puede observar no se cumple que :

$$\left| X_i^{'} - X_i^{\circ} \right| \leqslant \xi \qquad i = 1 , 4$$

En seguida se inicia el proceso iterativo, asígnando los valores calculados a los valores supuestos y calculando otros valores.

$$X_1S = X_1^{'} = \ \ 0.0719$$

$$X_2S = X_2^{'} = \ \ 0.4367$$

$$X_3S = X_3^{'} = -0.1550$$

$$X_4S = X_4^{'} = \ \ 0.1788$$

Sustituyendo el conjunto de valores supuestos en el grupo II de ecuaciones se determinan los valores calculados de esta nueva iteración.

$$X_1C = X_1^2 = \frac{5.0}{25.21} - \frac{2.0}{25.21}(0.4367) - \frac{3.1}{25.21}(-0.1550) - \frac{4.1}{25.21}(0.1788) = 0.1537$$

$$X_2C = X_2^2 = \frac{10.0}{15.2} - \frac{6.3}{15.2}(0.0719) + \frac{4.6}{15.2}(-0.1550) - \frac{7.1}{15.2}(0.1788) = 0.4979$$

$$X_3C = X_3^2 = \frac{2.0}{17.7} + \frac{5.7}{17.7}(0.0719) - \frac{6.9}{17.7}(0.4367) - \frac{3.6}{17.7}(0.1788) = -0.0704$$

$$X_4C = X_4^2 = \frac{11.2}{30.2} - \frac{2.7}{30.2}(0.0719) - \frac{7.4}{30.2}(0.4367) - \frac{3.5}{30.2}(-0.1550) = 0.2754$$

Comparación entre los valores calculados y los valores supuestos.

$$\left| X_1^2 - X_1^{'} \right| = \left| \ 0.1537 - 0.0719 \right| = 0.0818$$

$$\left| X_2^2 - X_2^{'} \right| = \left| \ 0.4979 - 0.4367 \right| = 0.0612$$

$$\left| X_3^2 - X_3^{'} \right| = \left| -0.0704 - (-0.1550) \right| = 0.0846$$

$$\left| X_4^2 - X_4^{'} \right| = \left| \ 0.2754 - 0.1788 \right| = 0.0966$$

Nuevamente no se cumple la condición y el proceso continua. En seguida se muestra una tabla con los valores obtenidos hasta aquella iteración que satisfizo la condición $\left| X_i^{n} - X_i^{n-1} \right| \leqslant \xi$

Iteración	x_1	$\lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\lvert\Delta x_2\rvert$	x_3	$\lvert\Delta x_3\rvert$	x_4	$\lvert\Delta x_4\rvert$
0	0.1983		0.6579		0.1130		0.3709	
1	0.0719	0.1264	0.4367	0.2212	-0.1550	0.2680	0.1788	0.1921
2	0.1537	0.0818	0.4979	0.0612	-0.0704	0.0846	0.2754	0.0966
3	0.1227	0.0318	0.4442	0.0534	-0.0875	0.0171	0.2433	0.0321
4	0.1343	0.0116	0.4669	0.0227	-0.0702	0.0173	0.2612	0.0179
5	0.1274	0.0069	0.4590	0.0079	-0.0789	0.0087	0.2526	0.0086
6	0.1305	0.0031	0.4632	0.0042	-0.0763	0.0026	0.2521	0.0005
7	0.1293	0.0012	0.4611	0.0021	-0.0776	0.0013	0.2545	0.0024
8	0.1299	0.0006	0.4619	0.0008	-0.0769	0.0007	0.2553	0.0008

Como se puede observar

$$\left| x_1^8 - x_1^7 \right| = 0.0006$$

$$\left| x_2^8 - x_1^8 \right| = 0.0008$$

$$\left| x_3^8 - x_3^7 \right| = 0.0007$$

$$\left| x_4^8 - x_3^8 \right| = 0.0008$$

o sea que en todos los casos se cumple que $\left| x_i^8 - x_i^7 \right| \leqslant 0.001$ y por lo tanto la solución es :

$$x_1 = 0.1299$$

$$x_2 = 0.4619$$

$$x_3 = -0.0769$$

$$x_4 = 0.2553$$

METODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL.

En éste procedimiento los pasos son:

1. Rearreglar las ecuaciones del sistema.

2. Suponer los valores de las incógnitas.

3. Determinar el valor calculado de la primera incógnita, sustituyendo los valores supuestos requeridos en el lado derecho de la ecuación primera del grupo II de ecuaciones.

   Determinar el valor calculado de la segunda incógnita, sustituyendo el valor calculado de la primera incógnita y los valores supuestos requeridos en la segunda ecuación del grupo II de ecuaciones.

   Así, sustituyendo los valores calculados y los valores supuestos, se determinan el resto de los valores calculados del resto de las incógnitas.

4. Comparar los valores calculados con los valores supuestos.

5. Si el valor absoluto de la diferencia de los valores calculados y los valores supuestos para todas las incógnitas es menor ó igual que la tolerancia prefijada entonces se ha encontrado la solución (conjunto de valores calculados).

   En caso contrario se deben suponer nuevos valores para las incógnitas y son los valores calculados de la iteración anterior. El proceso se repite hasta que se cumpla la condición mencionada.

Ejemplo 2.

Resolver el sistema de ecuaciones del ejemplo 1 usando el método iterativo de Gauss-Seidel. $\xi = 0.0005$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 25.21X_1 + 2.0X_2 + 3.1X_3 + 4.1X_4 &= 5.0 \\ 6.3X_1 + 15.2X_2 - 4.6X_3 + 7.1X_4 &= 10.0 \\ -5.7X_1 + 6.9X_2 + 17.7X_3 + 3.6X_4 &= 2.0 \\ 2.7X_1 + 7.4X_2 + 3.5X_3 + 30.2X_4 &= 11.2 \end{aligned} \qquad \ldots \text{I}$$

Solución

1. Rearreglo de las ecuaciones del sistema.

$$X_1 = \frac{5.0}{25.21} - \frac{2.0}{25.21}X_2 - \frac{3.1}{25.21}X_3 - \frac{4.1}{25.21}X_4$$

$$X_2 = \frac{10.0}{15.2} - \frac{6.3}{15.2}X_1 + \frac{4.6}{15.2}X_3 - \frac{7.1}{15.2}X_4$$

$$X_3 = \frac{2.0}{17.7} + \frac{5.7}{17.7}X_1 - \frac{6.9}{17.7}X_2 - \frac{3.6}{17.7}X_4 \qquad \ldots \text{II}$$

$$X_4 = \frac{11.2}{30.2} - \frac{2.7}{30.2}X_1 - \frac{7.4}{30.2}X_2 - \frac{3.5}{30.2}X_3$$

2. Se asignan valores supuestos a las incógnitas. Se toman como valores supuestos los términos independientes de cada ecuación.

$$X_1S = X_1^{\circ} = \frac{5.0}{25.21} = 0.1983$$

$$X_2S = X_2^{\circ} = \frac{10.0}{15.2} = 0.6579$$

$$X_3S = X_3^{\circ} = \frac{2.0}{17.7} = 0.1130$$

$$X_4S = X_4^{\circ} = \frac{11.2}{30.2} = 0.3709$$

3. Determinación de los valores calculados. Para X_1C se sustituyer los valores supuestos en la primera ecuación del grupo II de ecuaciones.

$$X_1C = X_1^1 = \frac{5.0}{25.21} - \frac{2.0}{25.21}(0.6579) - \frac{3.1}{25.21}(0.1130) - \frac{4.1}{25.21}(0.3709) = 0.0719$$

En el cálculo de los valores calculados de las siguientes incógnitas se usan los valores calculados de las incógnitas anteriores. Así en X_2C se usa el valor de X_1C en lugar de X_1S.

$$X_2C = X_2^1 = \frac{10.0}{15.2} - \frac{6.3}{15.2}(0.0719) + \frac{4.6}{15.2}(0.1130) - \frac{7.1}{15.2}(0.3709) = 0.4890$$

$$X_3C = X_3^1 = \frac{2.0}{17.7} + \frac{5.7}{17.7}(0.0719) - \frac{6.9}{17.7}(0.4890) - \frac{3.6}{17.7}(0.3709) = -0.1299$$

$$X_4C = X_4^1 = \frac{11.2}{30.2} - \frac{2.7}{30.2}(0.0719) - \frac{7.4}{30.2}(0.4890) - \frac{3.5}{30.2}(-0.1299) = 0.2597$$

4. Comparación entre los valores calculados y los valores supuestos.

$$\left| x_1' - x_1^{\circ} \right| = \left| 0.0719 - 0.1983 \right| = 0.1264$$

$$\left| x_2' - x_2^{\circ} \right| = \left| 0.489 - 0.6579 \right| = 0.1689$$

$$\left| x_3' - x_3^{\circ} \right| = \left| -0.1299 - 0.1130 \right| = 0.2429$$

$$\left| x_4' - x_4^{\circ} \right| = \left| 0.2597 - 0.3709 \right| = 0.1112$$

Como se puede observar, no se cumple la condición

$$\left| x_i' - x_i^{\circ} \right| \leqslant \xi \quad i = 1, 4$$

El siguiente paso es considerar los valores calculados de la iteración anterior como valores supuestos de esta nueva iteración.

Así los valores supuestos son:

$$x_1S = x_1' = 0.0719$$

$$x_2S = x_2^1 = 0.4890$$

$$x_3S = x_3^1 = -0.1299$$

$$x_4S = x_4^1 = 0.2597$$

El siguiente paso es determinar los valores calculados de esta nueva iteración.

$$x_1^2 = \frac{5.0}{25.21} - \frac{2.0}{25.21}(0.489) - \frac{3.1}{25.21}(-0.1299) - \frac{4.1}{25.21}(0.2597) = 0.1333$$

$$x_2^2 = \frac{10.0}{15.2} - \frac{6.3}{15.2}(0.1333) + \frac{4.6}{15.2}(-0.1299) - \frac{7.1}{15.2}(0.2597) = 0.4421$$

$$x_3^2 = \frac{2.0}{17.7} + \frac{5.7}{17.7}(0.1333) - \frac{6.9}{17.7}(0.4421) - \frac{3.6}{17.7}(0.2597) = -0.0692$$

$$x_4^2 = \frac{11.2}{30.2} - \frac{2.7}{30.2}(0.1333) - \frac{7.4}{30.2}(0.4421) - \frac{3.5}{30.2}(-0.0692) = 0.2587$$

En seguida se comparan los valores calculados y los valores supuestos.

$$\left| x_1^2 - x_1^1 \right| = \left| 0.1333 - 0.0719 \right| = 0.0614$$

$$\left| x_2^2 - x_2^1 \right| = \left| 0.4421 - 0.489 \right| = 0.0469$$

$$\left| x_3^2 - x_3^1 \right| = \left| -0.0692 - (-0.1299) \right| = 0.0607$$

$$\left| x_4^2 - x_4^1 \right| = \left| 0.2587 - 0.2597 \right| = 0.0010$$

Nuevamente se ve que no se cumple la condición, y el proceso continua.

En seguida se muestran los resultados para las demás iteraciones.

Iteración	x_1	$\lvert\Delta x_1\rvert$	x_2	$\lvert\Delta x_2\rvert$	x_3	$\lvert\Delta x_3\rvert$	x_4	$\lvert\Delta x_4\rvert$
0	0.1983		0.6579		0.1130		0.3709	
1	0.0719	0.1264	0.4890	0.1689	-0.1299	0.2429	0.2597	0.1112
2	0.1333	0.0614	0.4421	0.0469	-0.0692	0.0607	0.2587	0.0010
3	0.1297	0.0036	0.4624	0.2003	-0.0781	0.0089	0.2550	0.0037
4	0.1298	0.0001	0.4614	0.0010	-0.0769	0.0012	0.2551	0.0001
5	0.1297	0.0001	0.4617	0.0003	-0.0771	0.0002	0.2551	0.0000

Como se puede observar

$$\left| x_1^5 - x_1^4 \right| = 0.0001$$

$$\left| x_2^5 - x_2^4 \right| = 0.0003$$

$$\left| x_3^5 - x_3^4 \right| = 0.0002$$

$$\left| x_4^5 - x_4^4 \right| = 0.0000$$

En este caso se cumple la condición en menos iteraciones y el resutado es:

$$x_1 = 0.1297$$

$$x_2 = 0.4617$$

$$x_3 = -0.0771$$

$$x_4 = 0.2551$$

Comprobación de los resultados.

Se pueden comprobar los resultados, sustituyendo el conjunto de valores obtenidos para las incógnitas en el sistema I de ecuaciones.

$$X_1 = 0.1297$$

$$X_2 = 0.4617$$

$$X_3 = -0.0771$$

$$X_4 = 0.2551$$

1a. Ecuación.

$$25.21 \times 0.1297 + 2.0 \times 0.4617 + 3.1\,(-0.0771) + 4.1 \times (0.2551)$$
$$= 3.2697 + 0.9234 - 0.2390 + 1.0459 = 5.000$$

2a. Ecuación.

$$6.3 \times 0.1297 + 15.2 \times 0.4617 - 4.6\,(-0.0771) + 7.1 \times 0.2551$$
$$= 0.8171 + 7.0178 + 0.3546 + 1.8112 = 9.9953 = 10$$

3a. Ecuación.

$$-5.7 \times 0.1297 + 6.9 \times 0.4617 + 17.7 \times (-0.0771) + 3.6 \times (0.2551)$$

$$= -0.7392 + 3.1857 - 1.3646 + 0.9183 = 2.000$$

4a. Ecuación.

$$2.7 \times 0.1297 + 7.4 \times 0.4617 + 3.5 \times (-0.0771) + 30.2 \times 0.2551$$
$$= 0.3501 + 3.4165 - 0.2698 + 7.7040 = 11.20008 = 11.2$$

Ejemplo 3

Dado el siguiente sistema de ecuaciones :

$$
\begin{aligned}
17.2x_1 + 1.2x_2 - 3.5x_3 - 4.9x_4 &= -1.78 \\
-2.7x_1 - 13.5x_2 - 4.2x_3 - 1.8x_4 &= 6.99 \\
-1.8x_1 + 9.5x_2 + 25.3x_3 - 2.9x_4 &= 4.24 \\
1.1x_1 - 10.2x_2 + 2.8x_3 - 22.8x_4 &= 1.23
\end{aligned}
$$

Encontrar la solución usando el método iterativo de Gauss. Tome una tolerancia = 0.001.

1. $$x_1 = -\frac{1.78}{17.2} - \frac{1.2}{17.2}x_2 + \frac{3.5}{17.2}x_3 + \frac{4.9}{17.2}x_4$$

$$x_2 = -\frac{6.99}{13.5} - \frac{2.7}{13.5}x_1 - \frac{4.2}{13.5}x_3 - \frac{1.8}{13.5}x_4$$

$$x_3 = \frac{4.24}{25.3} + \frac{1.8}{25.3}x_1 - \frac{9.5}{25.3}x_2 + \frac{2.9}{25.3}x_4 \qquad \ldots\ldots \text{II}$$

$$x_4 = -\frac{1.23}{22.8} + \frac{1.1}{22.8}x_1 - \frac{10.2}{22.8}x_2 + \frac{2.8}{22.8}x_3$$

2. $$x_1S = x_1^{\circ} = -\frac{1.78}{17.2} = -0.1034$$

$$x_2S = x_2^{\circ} = -\frac{6.99}{13.5} = -0.5177$$

$$x_3S = x_3^{\circ} = \frac{4.24}{25.3} = 0.1675$$

$$x_4S = x_4^{\circ} = -\frac{1.23}{22.8} = -0.0539$$

3. $$x_1C = x_1^{1} = -\frac{1.78}{17.2} + \frac{1.2}{17.2}(0.5177) + \frac{3.5}{17.2}(0.1675) - \frac{4.9}{17.2}(0.0539) = -0.0486$$

$$x_2C = x_2^{1} = -\frac{6.99}{13.5} + \frac{2.7}{13.5}(0.1034) - \frac{4.2}{13.5}(0.1675) + \frac{1.8}{13.5}(0.0539) = -0.5420$$

$$x_3C = x_3' = \frac{4.24}{25.3} - \frac{1.8}{25.3}(0.1034) + \frac{9.5}{25.3}(0.5177) - \frac{2.9}{25.3}(0.0539) = 0.3484$$

$$x_4C = x_4' = -\frac{1.23}{22.8} - \frac{1.1}{22.8}(0.1034) + \frac{10.2}{22.8}(0.5177) + \frac{2.8}{22.8}(0.1675) = 0.1932$$

4. $$\left| x_1' - x_1^{\circ} \right| = \left| -0.0486 + 0.1034 \right| = 0.0548 = 0.0548$$

$$\left| x_2' - x_2^{\circ} \right| = \left| -0.5420 + 0.5177 \right| = -0.0243 = 0.0243$$

$$\left| x_3' - x_3^{\circ} \right| = \left| 0.3484 - 0.1675 \right| = 0.1809 = 0.1809$$

$$\left| x_4' - x_4^{\circ} \right| = \left| 0.1932 + 0.0539 \right| = 0.2471 = 0.2471$$

y como se puede observar no se cumple que:

$$\left| x_i' - x_i^{\circ} \right| \leq \varepsilon \quad i=1,4$$

En seguida se inicia el proceso iterativo, asignando los valores calculados a los valores supuestos y calculando otros valores.

$$x_1S = x_1' = -0.0486$$

$$x_2S = x_2' = -0.5420$$

$$x_3S = x_3' = 0.3484$$

$$x_4S = x_4' = 0.1932$$

Sustituyendo el conjunto de valbres supuestos en el grupo II de ecuaciones se determinan los valores calculados de esta nueva iteración.

$$x_1C = x_1^2 = -\frac{1.78}{17.2} + \frac{1.2}{17.2}(0.5420) + \frac{3.5}{17.2}(0.3484) + \frac{4.9}{17.2}(0.1932) = 0.0602$$

$$x_2C = x_2^2 = -\frac{6.99}{13.5} + \frac{2.7}{13.5}(0.0486) - \frac{4.2}{13.5}(0.3484) - \frac{1.8}{13.5}(0.1932) = -0.6422$$

$$x_3C = x_3^2 = \frac{4.24}{25.3} - \frac{1.8}{25.3}(0.0486) + \frac{9.5}{25.3}(0.5420) + \frac{2.9}{25.3}(0.1932) = 0.3898$$

$$x_4C = x_3^2 = -\frac{1.23}{22.8} - \frac{1.1}{22.8}(0.0486) + \frac{10.2}{22.8}(0.5420) + \frac{2.8}{22.8}(0.3484) = 0.2289$$

Comparación entre los valores calculados y los valores supuestos.

$$\left| x_1^2 - x_1' \right| = \left| 0.0602 + 0.0486 \right| = 0.1088$$

$$\left| x_2^2 - x_2' \right| = \left| -0.6422 + 0.5420 \right| = 0.1002$$

$$\left| x_3^2 - x_3' \right| = \left| 0.3898 - 0.3484 \right| = 0.0414$$

$$\left| x_4^2 - x_4' \right| = \left| 0.2289 - 0.1932 \right| = 0.0357$$

Nuevamente no se cumple la condición y el proceso continúa. En seguida - se muestra una tabla con los valores obtenidos hasta aquella iteración que satisfizo la condición

$$\left| x_i^n - x_i^{n-1} \right| \leq \mathcal{E}$$

Iteración	x_1	Δx_1	x_2	Δx_2	x_3	Δx_3	x_4	Δx_4
0	-0.1034		-0.5177		0.1675		-0.0539	
1	-0.0486	0.0548	-0.5420	0.0243	0.3483	0.1809	0.1932	0.2471
2	0.0602	0.1088	-0.6422	0.1002	0.3898	0.0414	0.2289	0.0357
3	0.0858	0.0256	-0.6816	0.0394	0.4392	0.0494	0.2841	0.0552
4	0.1144	0.0286	-0.7095	0.0279	0.4622	0.0230	0.3090	0.0249
5	0.1281	0.0137	-0.7256	0.0161	0.4775	0.0153	0.3257	0.0167
6	0.1371	0.0090	-0.7354	0.0098	0.4865	0.0090	0.3355	0.0098
7	0.1424	0.0053	-0.7413	0.0059	0.4919	0.0054	0.3414	0.0059
8	0.1456	0.0032	-0.7448	0.0035	0.4952	0.0033	0.3449	0.0035
9	0.1475	0.0019	-0.7469	0.0021	0.4971	0.0019	0.3471	0.0022
10	0.1486	0.0011	-0.7482	0.0013	0.4983	0.0012	0.3483	0.0012
11	0.1493	0.0007	-0.7490	0.0008	0.4990	0.0007	0.3491	0.0008

Como se podrá observar

$$\left| x_1^{11} - x_1^{10} \right| = 0.0007$$

$$\left| x_2^{11} - x_2^{10} \right| = 0.0008$$

$$\left| x_3^{11} - x_3^{10} \right| = 0.0007$$

$$\left| x_4^{11} - x_4^{10} \right| = 0.0008$$

O sea que en todos los casos se cumple que $\left| x_i^{11} - x_i^{10} \right| \leq 0.001$ y por lo tanto las soluciones son:

$$x_1 = 0.1493$$

$$x_2 = -0.749$$

$$x_3 = 0.4990$$

$$x_4 = 0.3491$$

Ejemplo 4

Resolver el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior usando el método iterativo de Gauss-Seidel $\varepsilon = 0.0005$.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}
17.2x_1 + 1.2x_2 - 3.5x_3 - 4.9x_4 &= -1.78 \\
-2.7x_1 - 13.5x_2 - 4.2x_3 - 1.8x_4 &= 6.99 \\
-1.8x_1 + 9.5x_2 + 25.3x_3 - 2.9x_4 &= 4.24 \\
1.1x_1 - 10.2x_2 + 2.8x_3 - 22.8x_4 &= 1.23
\end{aligned}$$

Solución

1. $$x_1 = -\frac{1.78}{17.2} - \frac{1.2}{17.2}x_2 + \frac{3.5}{17.2}x_3 + \frac{4.9}{17.2}x_4$$

$$x_2 = -\frac{6.99}{13.5} - \frac{2.7}{13.5}x_1 - \frac{4.2}{13.5}x_3 - \frac{1.8}{13.5}x_4$$

$$x_3 = -\frac{4.24}{25.3} - \frac{1.8}{25.3}x_1 - \frac{9.5}{25.3}x_2 + \frac{2.9}{25.3}x_4 \qquad \ldots\ldots \text{ II}$$

$$x_4 = -\frac{1.23}{22.8} + \frac{1.1}{22.8}x_1 - \frac{10.2}{22.8}x_2 + \frac{2.8}{22.8}x_3$$

2.

$$x_1S = x_1^{\circ} = -\frac{1.78}{17.2} = -0.1034$$

$$x_2S = x_2^{\circ} = -\frac{6.99}{13.5} = -0.5177$$

$$x_3S = x_3^{\circ} = \frac{4.24}{25.3} = 0.1675$$

$$x_4S = x_4^{\circ} = -\frac{1.23}{22.8} = -0.0539$$

3.

$$x_1C = x_1' = -\frac{1.78}{17.2} + \frac{1.2}{17.2}(0.5177) + \frac{3.5}{17.2}(0.1675) - \frac{4.9}{17.2}(0.0539) = -0.0486$$

$$x_2C = x_2' = \frac{6.99}{13.5} + \frac{2.7}{13.5}(0.0486) - \frac{4.2}{13.5}(0.1675) + \frac{1.8}{13.5}(0.0539) = -0.5529$$

$$x_3C = x_3' = \frac{4.24}{25.3} - \frac{1.8}{25.3}(0.0486) + \frac{9.5}{25.3}(0.5529) - \frac{2.9}{25.3}(0.0539) = 0.3655$$

$$x_4C = x_4' = -\frac{1.23}{22.8} - \frac{1.1}{22.8}(0.0486) + \frac{10.2}{22.8}(0.5529) + \frac{2.8}{22.8}(0.3655) = 0.2359$$

4.

$$\left| x_1' - x_1^{\circ} \right| = \left| -0.0486 + 0.1034 \right| = 0.0548$$

$$\left| x_2' - x_2^{\circ} \right| = \left| -0.5529 + 0.5177 \right| = 0.0352$$

$$\left| x_3' - x_3^{\circ} \right| = \left| 0.3655 - 0.1675 \right| = 0.1980$$

$$\left| x_4' - x_4^{\circ} \right| = \left| 0.2359 + 0.0539 \right| = 0.2898$$

Como se puede observar, no se cumple la condición

$$\left| x_i^{'} - x_i^{o} \right| \leq \varepsilon \quad i=1,4$$

El siguiente paso es considerar los valores calculados de la iteración anterior como valores supuestos de esta nueva iteración.

Así los valores supuestos son:

$$x_1S = x_1^{'} = -0.0486$$

$$x_2S = x_2^{'} = -0.5529$$

$$x_3S = x_3^{'} = 0.3655$$

$$x_4S = x_4^{'} = 0.2359$$

El siguiente paso es determinar los valores calculados de esta nueva iteración.

$$x_1^2 = -\frac{1.78}{17.2} + \frac{1.2}{17.2}(0.5529) + \frac{3.5}{17.2}(0.3655) + \frac{4.9}{17.2}(0.2359) = 0.0766$$

$$x_2^2 = -\frac{6.99}{13.5} - \frac{2.7}{13.5}(0.0766) - \frac{4.2}{13.5}(0.3655) - \frac{1.8}{13.5}(0.2359) = -0.6782$$

$$x_3^2 = \frac{4.24}{25.3} + \frac{1.8}{25.3}(0.0766) + \frac{9.5}{25.3}(0.6782) + \frac{2.9}{25.3}(0.2359) = 0.4547$$

$$x_4^2 = -\frac{1.23}{22.8} + \frac{1.1}{22.8}(0.0766) + \frac{10.2}{22.8}(0.6782) + \frac{2.8}{22.8}(0.4547) = 0.3089$$

En seguida se comparan los valores calculados y los valores supuestos.

$$\left| x_1^2 - x_1^{'} \right| = \left| 0.0766 + 0.0486 \right| = 0.1252$$

$$\left| x_2^2 - x_2^{'} \right| = \left| -0.6782 + 0.5529 \right| = 0.1253$$

$$\left| x_3^2 - x_3^{'} \right| = \left| 0.4547 - 0.3655 \right| = 0.0892$$

$$\left| x_4^2 - x_4^1 \right| = \left| 0.3089 - 0.2359 \right| = 0.0730$$

Nuevamente se ve que no se cumple la condición, y el proceso continúa.

En seguida se muestran los resultados para las demás iteraciones.

Iteración	x_1	$\|\Delta x_1\|$	x_2	$\|\Delta x_2\|$	x_3	$\|\Delta x_3\|$	x_4	$\|\Delta x_4\|$
0	−0.1034		−0.5177		0.1675		−0.0539	
1	−0.0486	0.0548	−0.5529	0.0352	0.3655	0.1980	0.2359	0.2898
2	0.0767	0.1253	−0.6783	0.1254	0.4548	0.0893	0.3090	0.0731
3	0.1244	0.0477	−0.7253	0.0470	0.4842	0.0294	0.3360	0.0270
4	0.1413	0.0169	−0.7415	0.0162	0.4945	0.0103	0.3453	0.0093
5	0.1472	0.0059	−0.7471	0.0056	0.4982	0.0037	0.3485	0.0032
6	0.1493	0.0021	−0.7491	0.0020	0.4994	0.0012	0.3497	0.0012
7	0.1500	0.0007	−0.7498	0.0007	0.4998	0.0004	0.3501	0.0004
8	0.1502	0.0002	−0.7500	0.0002	0.5000	0.0002	0.3502	0.0001

Como se puede observar

$$\left| x_1^8 - x_1^7 \right| = 0.0002$$

$$\left| x_2^8 - x_2^7 \right| = 0.0002$$

$$\left| x_3^8 - x_3^7 \right| = 0.0002$$

$$\left| x_4^8 - x_4^7 \right| = 0.0001$$

En este caso se cumple la condición en menos iteraciones y el resultado es :

$$x_1 = 0.1502$$

$$x_2 = -0.7500$$

$$x_3 = 0.5000$$

$$x_4 = 0.3502$$

CONTINUACION ANEXO 4.

ALGORITMO PARA INVERTIR MATRICES

Nomenclatura.

1. Se denominarán "pivotes" a todos los elementos de la diagonal principal de la matriz de coef. A.

2. Se denominarán semipivotes a todos los elementos de la columna que contenga el pivote (excepto éste).

3. Se denominarán renglón entrante aquel que se calcula a partir del renglón que contiene el pivote en las etapas anteriores.

4. Se seleccionarán los pivotes para la transformación, partiendo de la esquina N - W.

1a. Etapa.

1. Se selecciona como 1er. pivote aquel de la esquina N - W.

2. Para obtener los elementos del primer renglón entrante se dividen cada uno de los elementos del renglón que contiene el pivote en la etapa anterior, entre el pivote mismo.

3. Para obtener los elementos de los otros renglones se hace lo siguiente: cada elemento de la nueva etapa es igual al elemento correspondiente de la etapa anterior, menos el producto del semipivote por el elemento del renglón entrante de la misma columna que se está calculando.

2a. Etapa.

1. Se selecciona como 2º pivote el que sigue en la diagonal principal después de la esquina N - W.

   Se repiten los puntos 2 y 3 de la etapa 1a.

Na. Etapa.

Los puntos 2 y 3 de la 1a. etapa se repiten hasta que todos los elementos de la diagonal principal queden transformados en 1.

EJEMPLO 1 EN DETALLE.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

pivote

semi-
pivotes

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \boxed{-2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Etapa anterior sacada del sistema

pivote

Renglón Entrante

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{0} & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

semipivote

dividiendo por 1 todo el r. etapa anterior

Etapa N° 1

Para los demás renglones

Nuevo elemento = Elemento corresp. etapa anterior − Semipivote x elemento del renglón entrante del que se calcula

Semipivote

$(-2) - (-2)\,(1) = 0$, $1 - (-2)\,(1) = 3$, $1 - (-2)\,(-1) = -1$

$0 - (-2)\,(1) = 2$ $\quad 1 - (-2)\,(0) = 1$ $\quad 0 - (-2)\,(0) = 0$ $\quad 3 = (-2)\,2 = 7$

*Nota. Siempre el renglón entrante en una etapa fue el que resultó de dividir por el pivote de la etapa anterior.

$$1 - 1(1) = 0 \qquad 0 - 1(1) = -1 \qquad 6 - 1(2) = 4$$
$$1 - 1(1) = 0 \qquad 0 - 1(0) = 0$$
$$1 - 1(-1) = 2 \qquad 1 - 1(0) = 1$$

Semipivote　　　　Segunda Etapa

$$\text{R. Entrante}\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & \boxed{-2/3} & 1/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & \boxed{-1/3} & 2/3 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\leftarrow \text{R. Entrante}$$

Pivote

CALCULO DE LA SEGUNDA ETAPA

Calculando el primer renglón:

$$\begin{aligned} 1 - (1 \times 0) &= 1 \\ 1 - (1 \times 1) &= 0 \\ -1 - (1 \times -1/3) &= -2/3 \\ 1 - (1 \times 2/3) &= 1/3 \\ 0 - (1 \times 1/3) &= -1/3 \\ 0 - (1 \times 0) &= 0 \\ 2 - (1 \times 7/3) &= 1/3 \end{aligned}$$

Calculando el segundo renglón:

$$\begin{aligned} 0 - (0 \times 0) &= 0 \\ 0 - (0 \times 1) &= 0 \\ 2 - (0 \times -1/3) &= 2 \\ -1 - (0 \times 2/3) &= -1 \\ 0 - (0 \times 1/3) &= 0 \\ 1 - (0 \times 0) &= 1 \\ 4 - (0 \times 7/3) &= 4 \end{aligned}$$

CALCULO DE LA TERCERA ETAPA

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 2 \end{array}\right)\leftarrow \text{Renglón Entrante}$$

Calculando el primer renglón:

$$\begin{aligned} 1 - (-2/3 \times 0) &= 1 \\ 0 - (-2/3 \times 0) &= 0 \\ -2/3 - (-2/3 \times 1) &= 0 \\ 1/3 - (-2/3 \times -1/2) &= 0 \\ -1/3 - (-2/3 \times 0) &= -1/3 \end{aligned}$$

Calculando el segundo renglón:

$$\begin{aligned} 0 - (-1/3 \times 0) &= 0 \\ 1 - (-1/3 \times 0) &= 1 \\ -1/3 - (-1/3 \times 1) &= 0 \\ 2/3 - (-1/3 \times -1/2) &= 1/2 \\ 1/3 - (-1/3 \times 0) &= 1/3 \end{aligned}$$

$$0 - (-2/3 \times 1/2) \quad = 1/3$$
$$-1/3 - (-2/3 \times 2) \quad = 1$$

$$0 - (-1/3 \times 1/2) \quad = 1/6$$
$$7/3 - (-1/3 \times 2) \quad = 3$$

así:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vector Soln.

Observación.

Ayuda a simplificar los cálculos el hecho de que en cada etapa para la columna seleccionada aparece 1 en lugar del pivote y cero en los lugares de los semipivotes razón para la cual pueden escribirse estas cifras sin necesidad de calcularlas.

La matriz extendida (con I_3 intercalada) del sistema de ecuaciones anterior es:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Aplicando las fórmulas de eliminación se tienen las siguientes etapas :

Etapa 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Etapa 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Etapa 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la inversa de la matriz de coeficientes es la siguiente :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y el vector de soluciones es

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO Nº 2.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Encontrar la matriz inversa y las soluciones que satisfagan este sistema de ecuaciones simultáneas.

La matriz aumentada (con la matriz identidad intercalada) del sistema de ecuaciones anterior es :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Aplicando las fórmulas de eliminación se tienen las siguientes etapas :

Etapa 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 10 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & -9 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Etapa 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & 1/4 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/4 & -1/4 & 1/8 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 5/4 & 7/8 & 1 & -3/4 \end{array}\right)$$

Etapa 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 9/2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -7/2 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la inversa de la matriz de coeficientes es la siguiente :

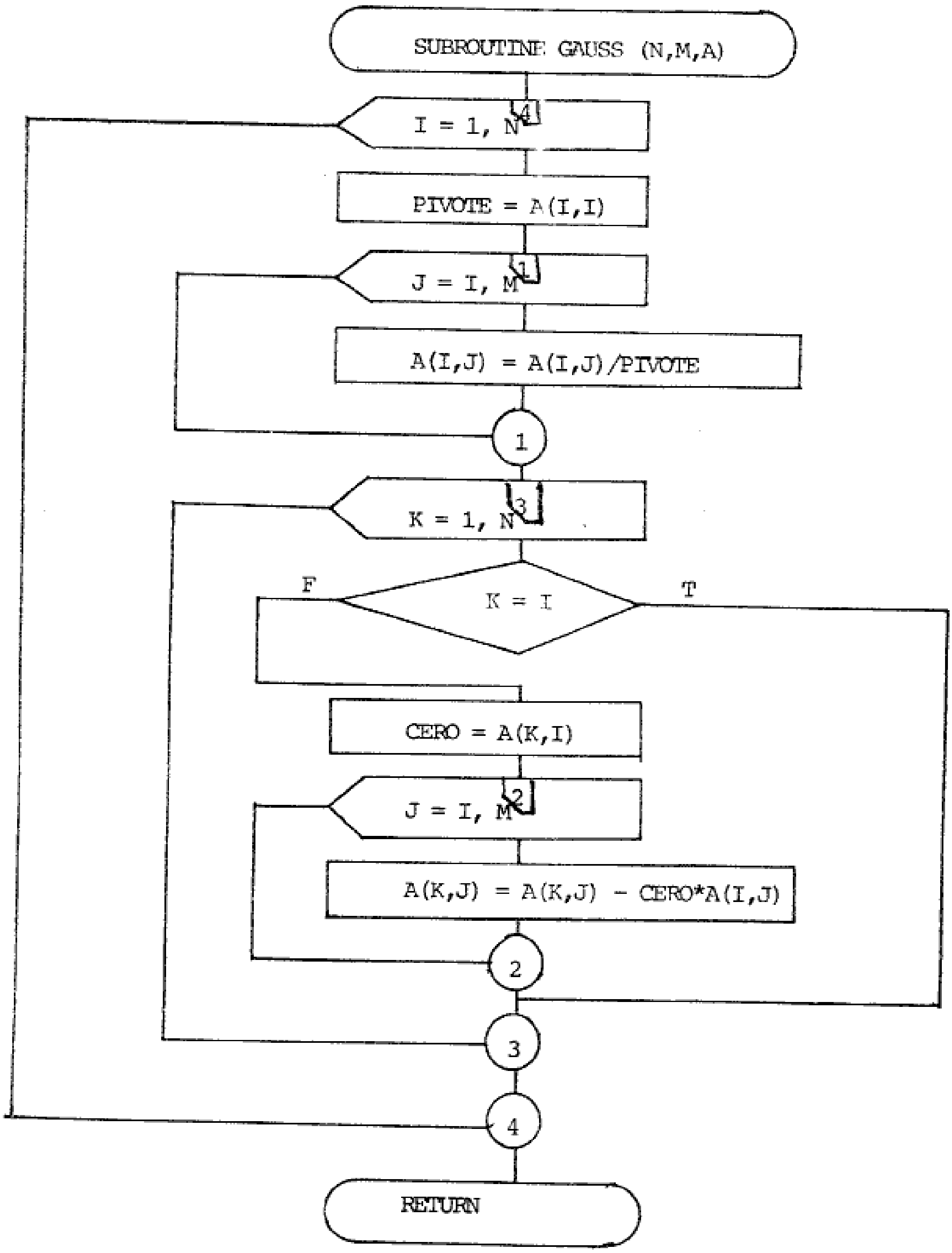
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -5 & -6 \\ 6 & 9/2 & 5 \\ -5 & -7/2 & -4 \end{bmatrix}$$

y el vector de soluciones es :

$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

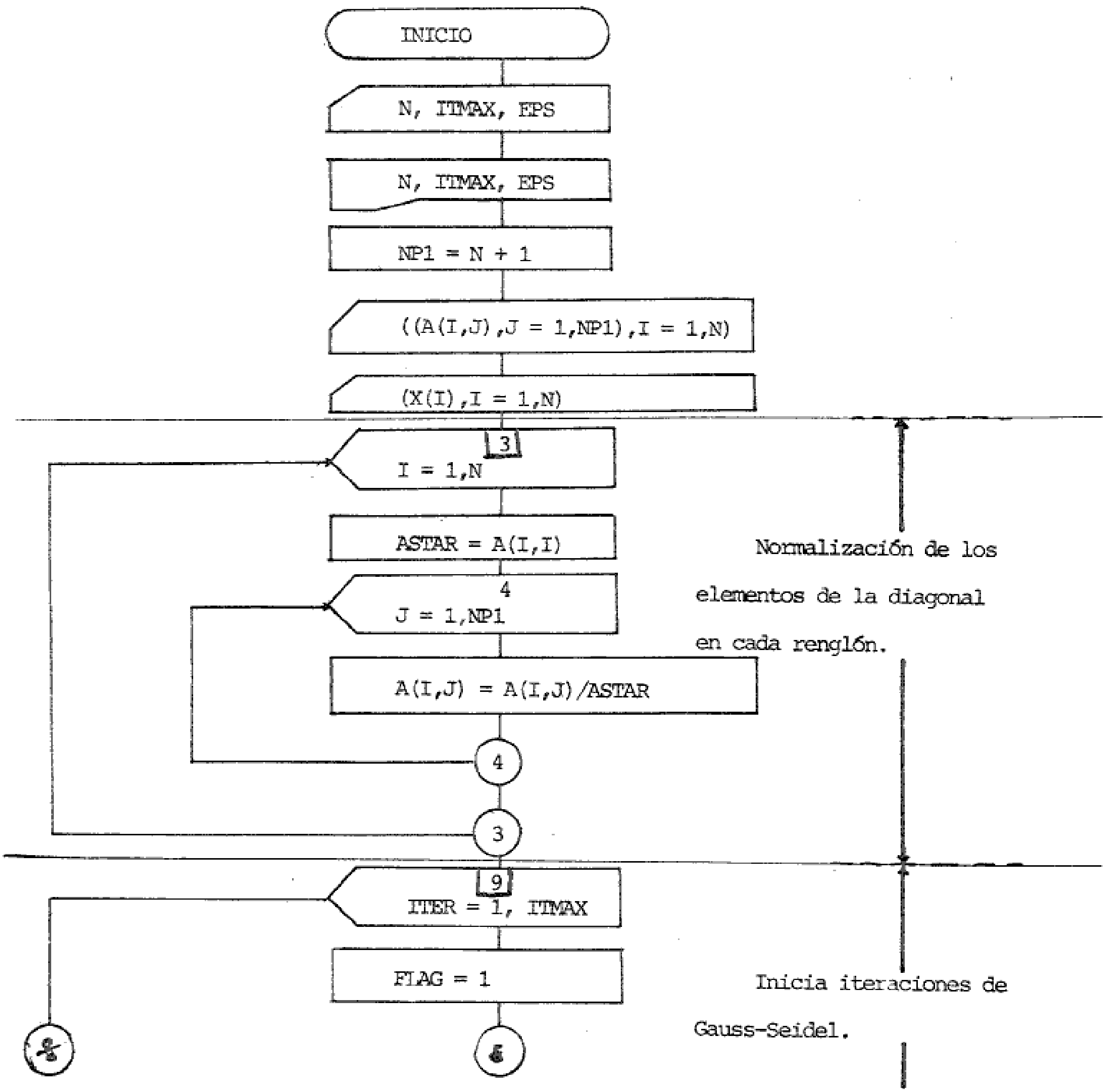
SUBRUTINA GAUSS.

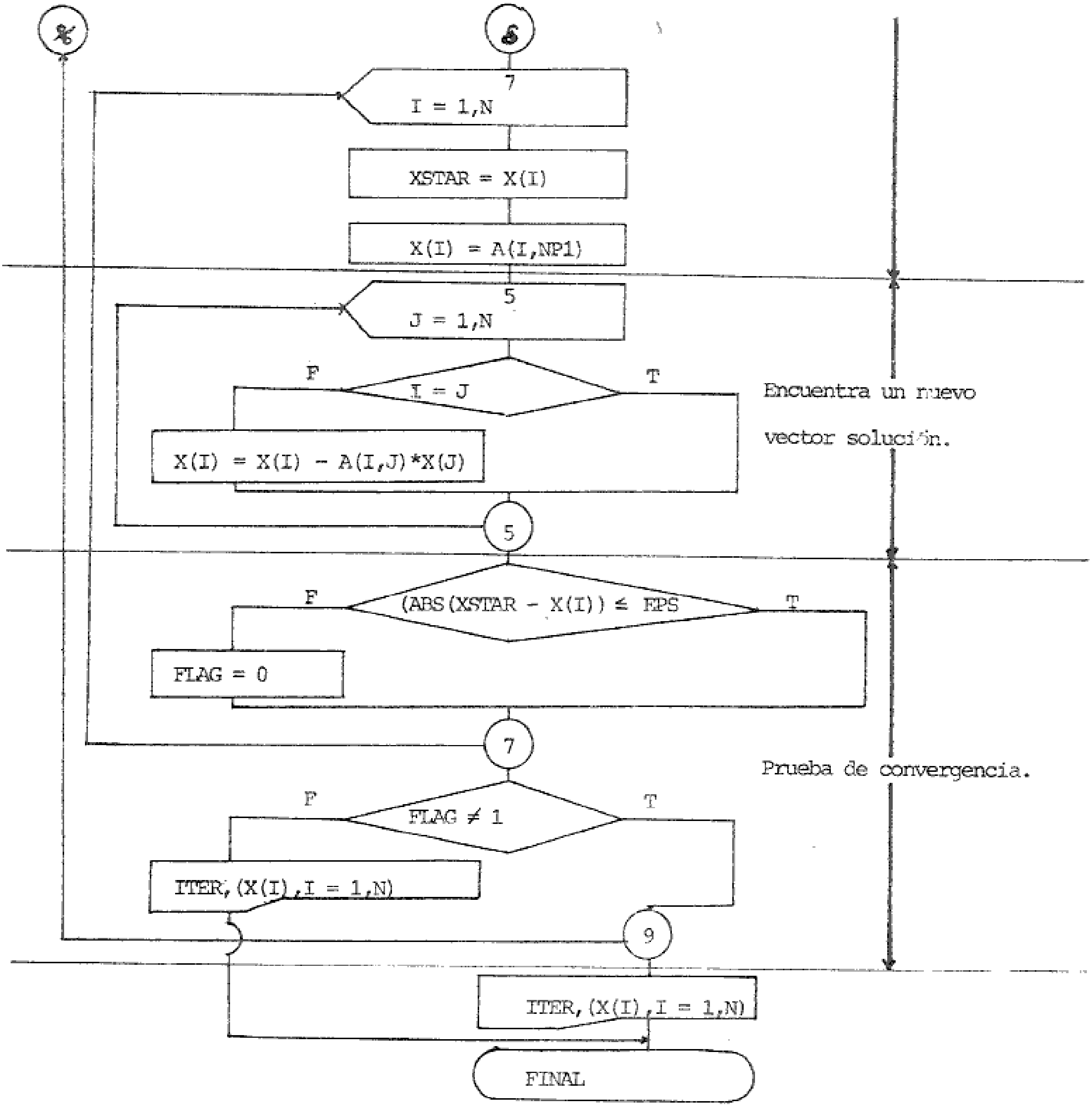
UN ALGORITMO.



METODO DE GAUSS-SEIDEL.

UN ALGORITMO.




7
I = 1,N
XSTAR = X(I)
X(I) = A(I,NP1)
5
J = 1,N
F
I = J
T
X(I) = X(I) - A(I,J)*X(J)
5
Encuentra un nuevo vector solución.
F
(ABS(XSTAR - X(I)) ≤ EPS
T
FLAG = 0
7
Prueba de convergencia.
F
FLAG ≠ 1
T
ITER, (X(I),I = 1,N)
9
ITER, (X(I),I = 1,N)
FINAL

IMPLEMENTACION AL ALGORITMO DEL METODO DE GAUSS-SEIDEL

Lista de Variables Principales

A	Matriz aumentada de coeficientes $n \times (n + 1)$ conteniendo elementos $a_{i,j}$.
ASTAR , XSTAR	Almacenamiento temporal de los elementos A y X respectivamente.
EPS	Tolerancia usada en la prueba de convergencia ε.
FLAG	Una etiqueta usada en la prueba de convergencia.
ITER	Contador de iteraciones, K
ITMAX	Nº máximo de iteraciones deseadas Kmax.
N	Nº de ecuaciones simultáneas, n.
X	Vector que contiene los elementos correspondientes a la aproximación del vector solución, X_K.