INTEGRACION NUMERICA.

Introducción.

También en Ingeniería se presenta con frecuencia la necesidad de integrar o diferencias una función definida en forma tabular o en forma gráfica que no está definida explícitamente. O bien, aunque esté definida explícitamente resulta difícil o hasta imposible integrar o diferenciar la función.

Existe una gran cantidad de métodos para integrar o diferenciar en las condiciones anteriores, pero todos están contemplados entre los siguientes :

- Métodos Numéricos
- Métodos Gráficos
- Métodos Mecánicos
- Métodos Electrónicos
- Métodos Mixtos

Los métodos numéricos son los más precisos usados con los electrónicos.

Integración Numérica (Cuadratura Numérica).

Para nuestro caso se verán dos tipos especiales para la integración que son : la Regla del Trapecio y Regla de 1/3 de Simpson, que son casos especiales de Newton - Cotes.

Procedimiento de Aprendizaje :

1. Estudiar el anexo de la unidad 6 las páginas 316 a 323 del libro base del curso o bien del :

   METODOS NUMERICOS
   LUTHE . OLIVERA . SCHUTZ
   LIMUSA, MEX. 1978.
   Páginas 170 a 177.

2. Explicar con ayuda de fórmulas matemáticas y gráficas en qué consiste el Método de Simpson y la regla del trapecio.

3. Reducir matemáticamente la regla de 3/8 de Simpson.

4. Encontrar el valor de la integral $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{(1-x^2)(2-x)}\,dx$ por la Regla de Simpson y el error para $\Delta x = 0.5$ y $\Delta x = 0.1$ el valor correcto de la integral es $I = 2.2033$.

   Los valores de la función para $\Delta x = 0.1$ desde -1 hasta 1 son los siguientes:

   f(x) 0, .742294, 1.003992, 1.173456, 1.289961, 1.369307, 1.419859
   1.446720, 1.453272, 1.441874, 1.414214 estos son

   De −1 a 0. y de 0.1 a 1 son:

   1.371496, 1.314534, 1.243756, 1.159310, 1.060660, 0.946573
   0.814248, 0.657267, 0.45165, 0

Solicitar examen de la unidad después de haber resuelto los puntos del procedimiento de aprendizaje y entregarlos al solicitarlo.

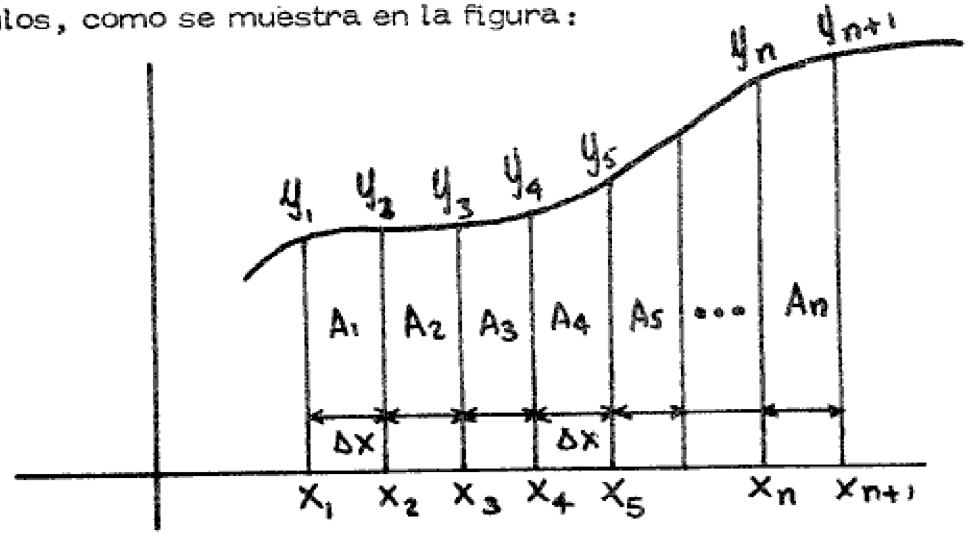
*Recordatorio: en el plan general se encuentra los programas que debes entregar en cada unidad.

ANEXO.

REGLA TRAPEZOIDAL.

La Regla Trapezoidal consiste en lo siguiente:

Si tenemos la gráfica de cualquier función y la subdividimos en pequeños rectán gulos, como se muestra en la figura:



Entonces el área bajo la curva, que es la definición de la integral, será, aproxi madamente igual a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Donde:

$$A_1 = \Delta x \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$A_2 = \Delta x \left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

$$A_3 = \Delta x \left(\frac{y_3 + y_4}{2}\right)$$

$$A_n = \Delta x \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

Entonces el área bajo la curva es :

$$\text{Area Bajo Curva} = \frac{\Delta x}{2}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + \ldots + 2y_n + y_{n+1})$$

Para nuestro caso analizaremos, la siguiente integral, por la regla trapezoidal :

$$\int_{0.2}^{1.4} (\operatorname{sen} x - \ln x + e^x)\,dx \qquad \text{con} \quad \Delta x = 0.2$$

i	x	f(x)
1	0.2	3.0295089
2	0.4	2.7975321
3	0.6	2.8974861
4	0.8	3.1660393
5	1.0	3.5597513
6	1.2	4.0698330
7	1.4	4.7041755

Entonces :

$$\int_{0.2}^{1.4} (\operatorname{sen} x - \ln x + e^x)\,dx = \frac{0.2}{2}(3.0295089 + 2(2.7975321) + 2(2.8974861)$$

$$+ 2(3.1660393) + 2(3.5597513) + 2(4.0698330) + 4.7041755)$$

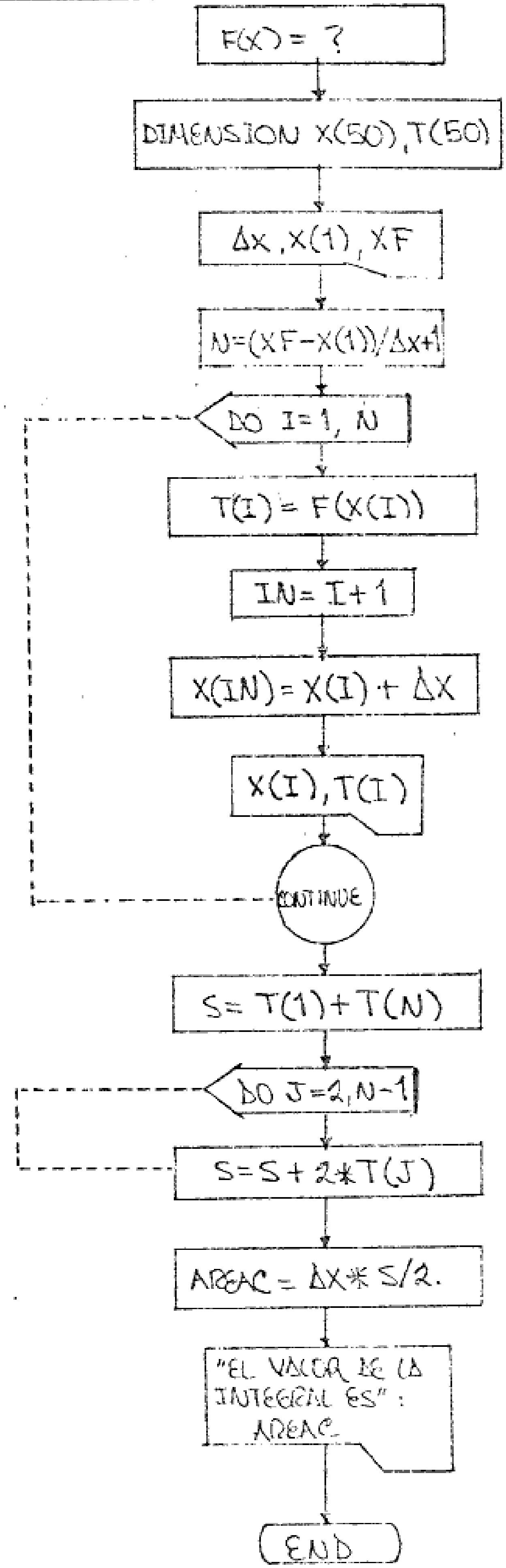
$$= \frac{0.2}{2}(40.714965) = 4.0714965$$

Por otra parte, integrando la función se obtiene el siguiente valor :

$$\int_{0.2}^{1.4} (\operatorname{sen} x - \ln x + e^{x})\,dx = (-\cos x - x\ln x + x + e^{x}) \Big|_{0.2}^{1.4} = 4.6947225$$

Entonces el error obtenido al calcular la integral por la regla trapezoidal es : 13.27%.

ALGORITMO GENERAL PARA LA REGLA TRAPEZOIDAL

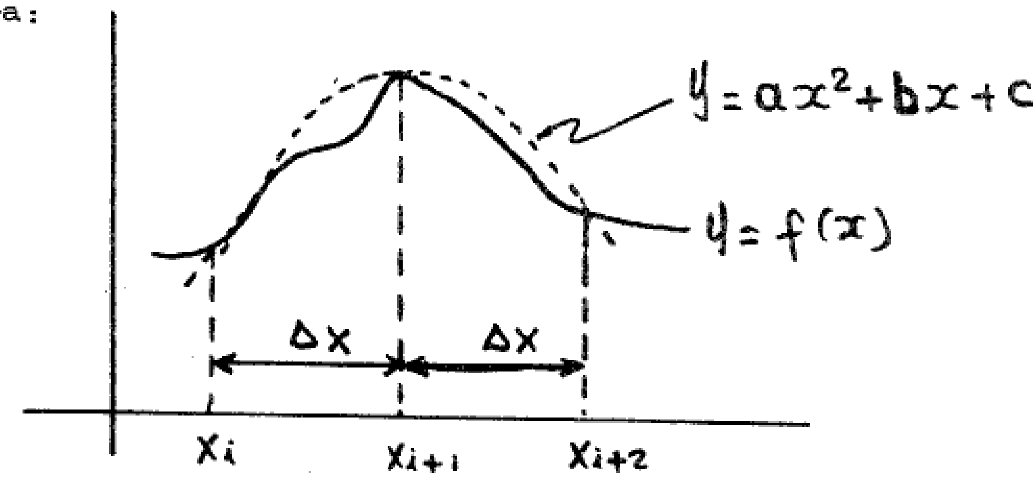


SIMPSON DE UN TERCIO.

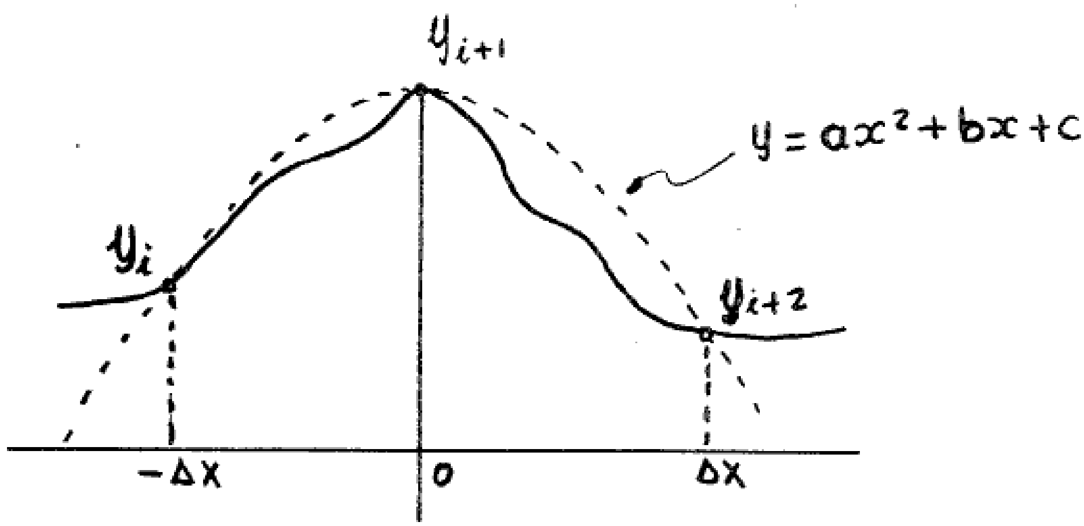
Simpson de un tercio consiste en tomar tres puntos consecutivos del conjunto dado, los cuales son:

$$(x_i , y_i) , (x_{i+1} , y_{i+1}) \text{ y } (x_{i+2} , y_{i+2})$$

Los cuales uniéndolos con una parábola de segundo grado, se tiene de acuerdo a la figura:



Haciendo una translación de ejes, para mayor facilidad de cálculo, lo cual no afecta a la integración, se tiene:



Entonces ahora los puntos serán:

$$(-\Delta x, y_i),\ (0, y_{i+1}) \ \text{ y } \ (\Delta x, y_{i+2})$$

Entonces integrando la parábola desde $-\Delta x$ hasta Δx, la cual es aproximadamente igual a la función, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^3}{2} + cx \right]_{-\Delta x}^{\Delta x} =$$

$$= \frac{2}{3} a(\Delta x)^3 + 2c(\Delta x)$$

Que es la ecuación a dos franjas. Entonces ahora el problema consiste en encontrar las constantes a y c. Para encontrar los valores de a y c se establece un sistema de ecuaciones:

1. $y_i = a(-\Delta x)^2 + b(-\Delta x) + 0$

2. $y_{i+1} = c$

3. $y_{i+2} = a(\Delta x)^2 + b(\Delta x) + c$

Entonces resolviendo el sistema de ecuaciones se encuentra que:

$$a = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2(\Delta x)^2}$$

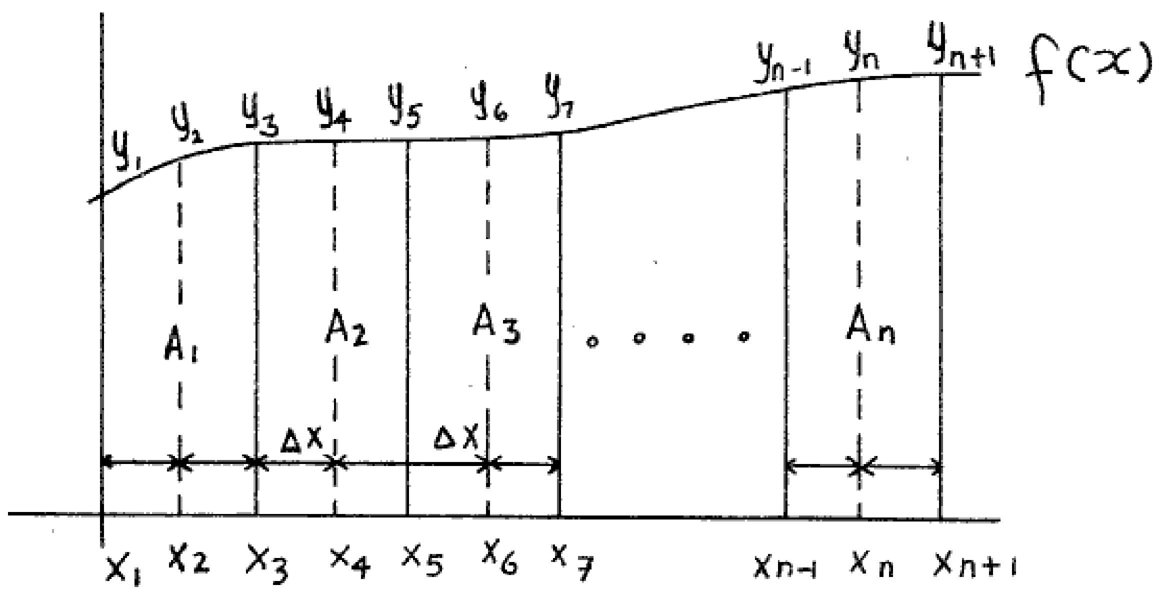
$$b = \frac{y_{i+2} - y_i}{2(\Delta x)}$$

$$c = y_{i+1}$$

Sustituyendo en la ecuación Area de dos fajas:

$$A_2 \text{ fajas} = \frac{2}{3} a(\Delta x)^3 + 2c(\Delta x) = \frac{2}{2} \left(\frac{y_i - 2y_i+1+y_i+2}{2(\ x)^2}\right) (\Delta x)^3 + 2y_i + 1\ (\Delta x)$$

$$A_2 \text{ fajas} = \frac{1}{3} (\Delta x)\ (y_i + 4y_i + 1 + y_i + 2)$$



De la figura anterior se ve que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n/2} A_i \qquad \text{siendo n par.}$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

Entonces, tomando como base la fórmula de A_2 fajas el área aproximada será:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) + \frac{\Delta x}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5) + \frac{\Delta x}{3}(y_5 + 4y_6 + y_7) + \cdots$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left(y_1 + 4 \sum_{i=2,4,\ldots}^{i=n} y_i + 2 \sum_{i=3,5,\ldots}^{i=n-1} y_i + y_{n+1}\right)$$

Que es la Regla de Simpson de 1/3 para x en n franjas ($n \to$par). Ahora analizaremos la misma integral del ejemplo anterior, para $\Delta x = 0.2$ pero por la regla de Simpson de 1/3.

$$\int_{0.2}^{1.4} (\operatorname{sen} x - \ln x + e^x)\,dx$$

Entonces tabulando:

i	x	f(x)
1	0.2	3.0295089
2	0.4	2.7975321
3	0.6	2.8974861
4	0.8	3.1660393
5	1.0	3.5597513
6	1.2	4.0698330
7	1.4	4.7041755

Entonces, aplicando la fórmula de Simpson de 1/3:

$$\int_{0.2}^{1.4} (\operatorname{sen} x - \ln x + e^x)\, dx = \frac{0.2}{3}(3.0295089 + 4(2.7975321 + 3.1660393) +$$

$$4(4.0698330) + 2(2.8974861 + 3.5597513) + 4.7041755)$$

$$= \frac{0.2}{3}(60.781774) = \quad 4.0521180$$

Si se desea aumentar la presición solo se disminuye la Δx.

ALGORITMO GENERAL PARA EL METODO DE SIMPSON DE 1/3