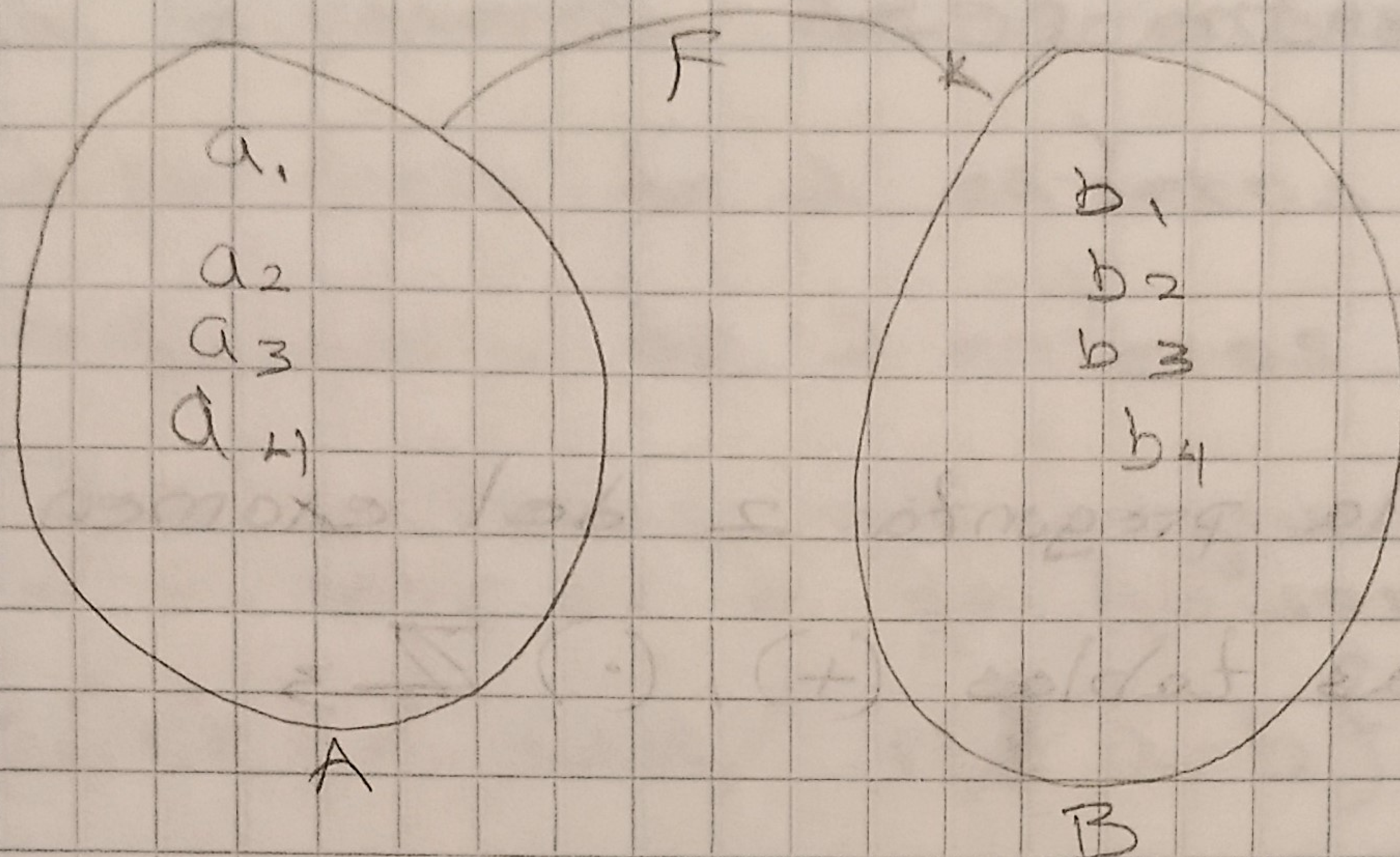
Funciones (Parejas Ordenadas)

Dominio



$A = D_f$

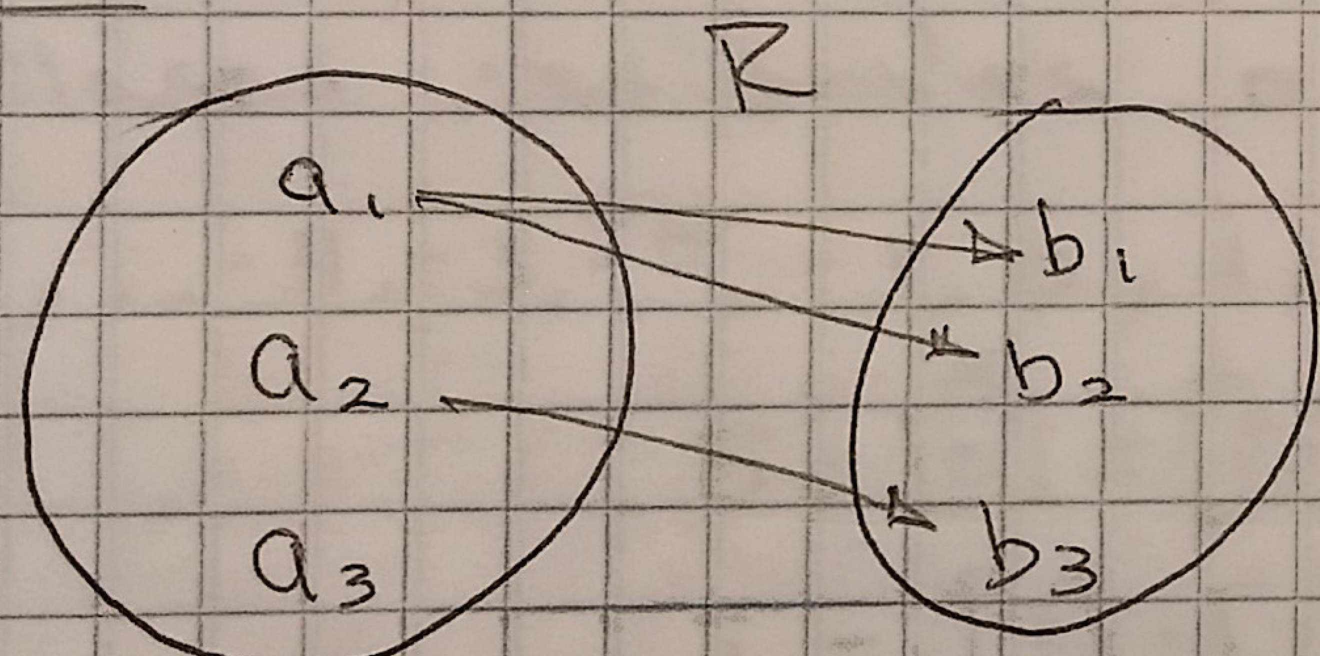
contradominio
o
Codominio

b_1 = Imagen

Rango = conjunto de imágenes

impropio — Rango = Contradominio

Propio — Contradominio $\neq$ Rango



$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3)\}$

¿Cómo defines?

Toda Función es una Relación ✓

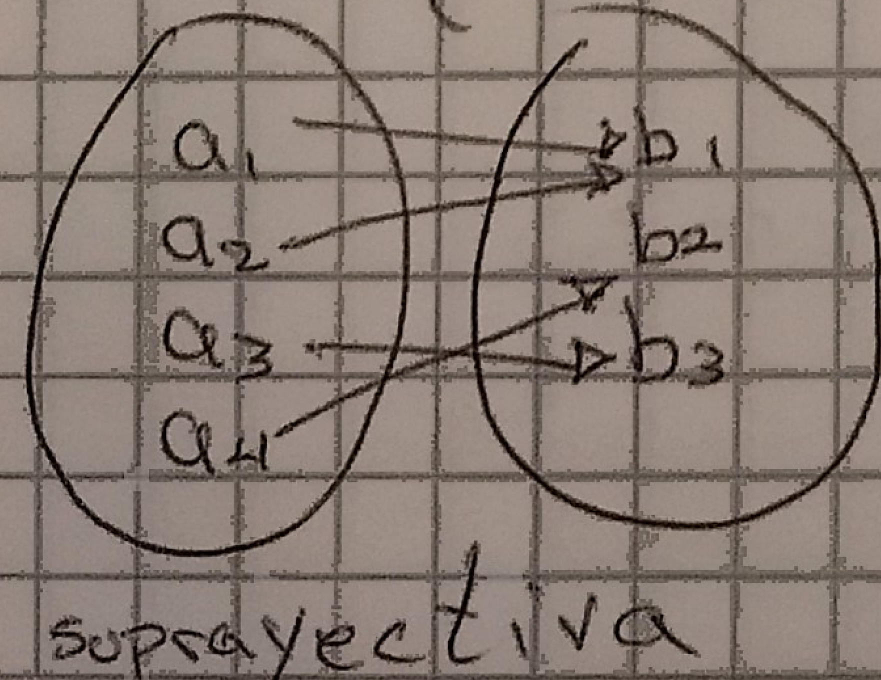
o

~~Toda relación es una Función~~

Ejr.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$



supráyectiva

$D_f = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$R_f = \{b_1, b_2, b_3\}$

$Cod_f = \{b_1, b_2, b_3\}$

Función Suprayectiva

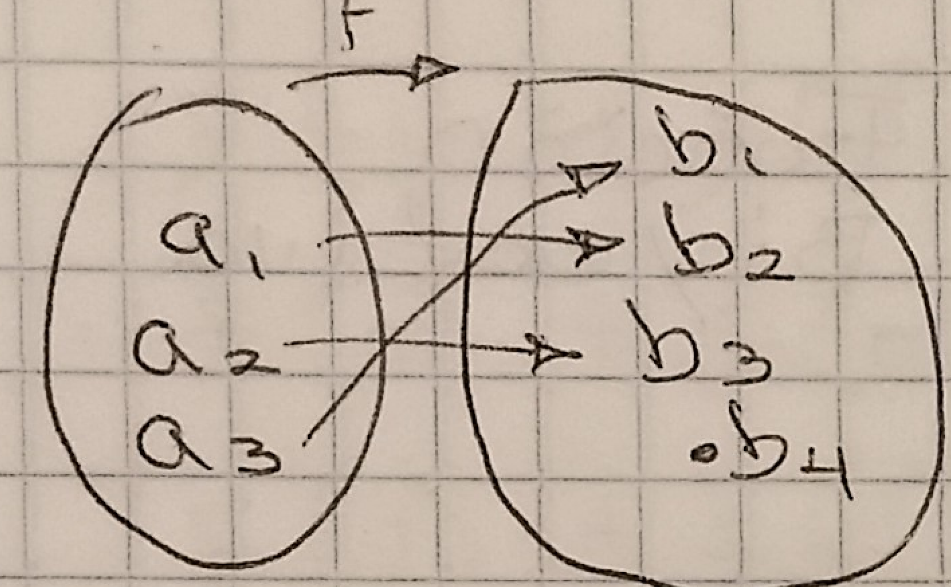
Def: Suprayectiva

Una función $f: A \to A$ se da si el conjunto formado por las imagenes es igual al conjunto B, si para toda $b \in B$ existe un elemento $a \in A$, tal que $f(a) = b$

De otra manera: $\forall\, b \in B\ \exists\ a \in A \Rightarrow f(a) = b$

ó cuando el contraminio y Rango son iguales.

Ej.



Inyectiva

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

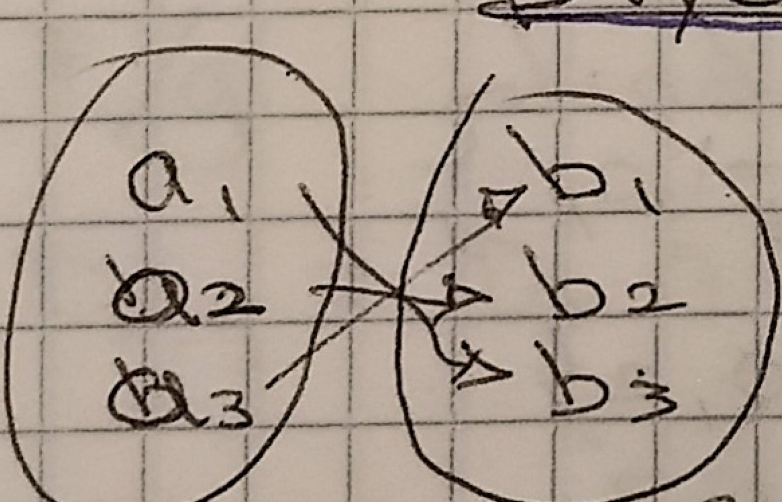
$B = \{$

Nota: suprayectiva 2 origenes llegan al mismo destino
Inyectiva varios origenes " a diferentes "

Def. Inyectiva.

Una función $f: A \to B$ es inyectiva si para toda $a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$ se tiene $f(a_1) \neq f(a_2)$

Biyectiva = Inyectiva y Suprayectiva

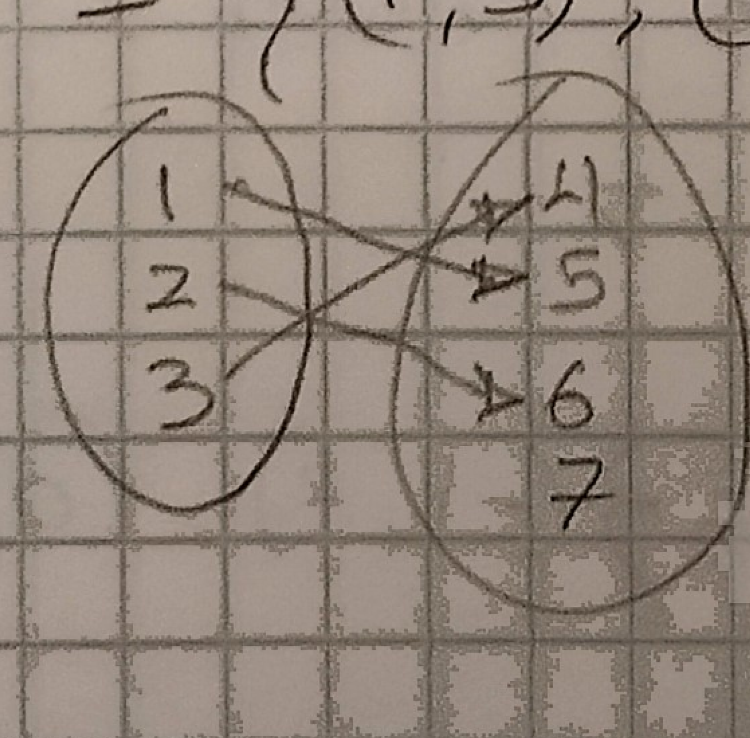


Una Función $f: A \to B$ es biyectiva si se cumple que sea inyectiva y suprayectiva.

Ej: ¿Es una función? de que tipo

Ej: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$

$= \{(1,5), (2,6), (3,4)\}$



Función Inyectiva

b) $A = \{1,2\}$ $B = \{3,4\}$

$= \{(1,3), (1,4)\}$ Relación

c) $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{5,6,7,8\}$

$= \{(1,6), (2,8), (3,5), (7,7)\}$ Función Biyectiva

d) $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{5,6,7\}$

$f = \{(1,5), (2,6), (3,6)\ (4,7)\}$

OPERACIONES CON FUNCIONES

$f + g$

$f = \{(-2,0), (-1,1), (0,2), (1,3)\}$ $D_f = \{-2,-1,0,1\}$

$g = \{(-1,1), (0,0), (2,4)\}$ $D_g = \{-1,0,2\}$

$D_{f+g} = \{-1, 0 \underbrace{\qquad}_{\text{no va nada}} \} = D_f \cap D_g$

$\{(-1,\ ), (0,\ )$

-1 $f(-1) + g(-1) = 1 + 1 = 2$

$\downarrow$

0 $f(0) + g(0) = 2 + 0 = 2$

$f + g = \{(-1,2), (0,2)\}$

Ejr Calcular:

$2f - g$

$2f = 2\{(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3)\}$

$D_f \cap D_f = \{-2,-1,0,1\}$

$f + f =$

$2f = \{(-2, \ ),(-1, \ ),(0, \ ),(1, \ )\}$

-2	$f(-2) + f(-2)$	$=$	0
-1	$f(-1) + f(-1)$	$=$	2
0	$f(0) + f(0)$	$=$	4
1	$f(1) + f(1)$	$=$	6

$2f = \{(-2,0),(-1,2),(0,4),(1,6)\}$

$D_{2f-g} = D_{2f} \cap D_g = \{-1,0\}$

$2f - g = \{(-1, \ ), (0, \ )\}$

$-1 \quad 2f(-1) - g(-1) = 2 - 1 = 1$

$0 \quad 2f(0) - g(0) = 4 - 0 = 4$

$2f - g = \{(-1,1), (0,4)\}$

Ejr f/g donde $g \neq 0$

→ siempre es $\cap$

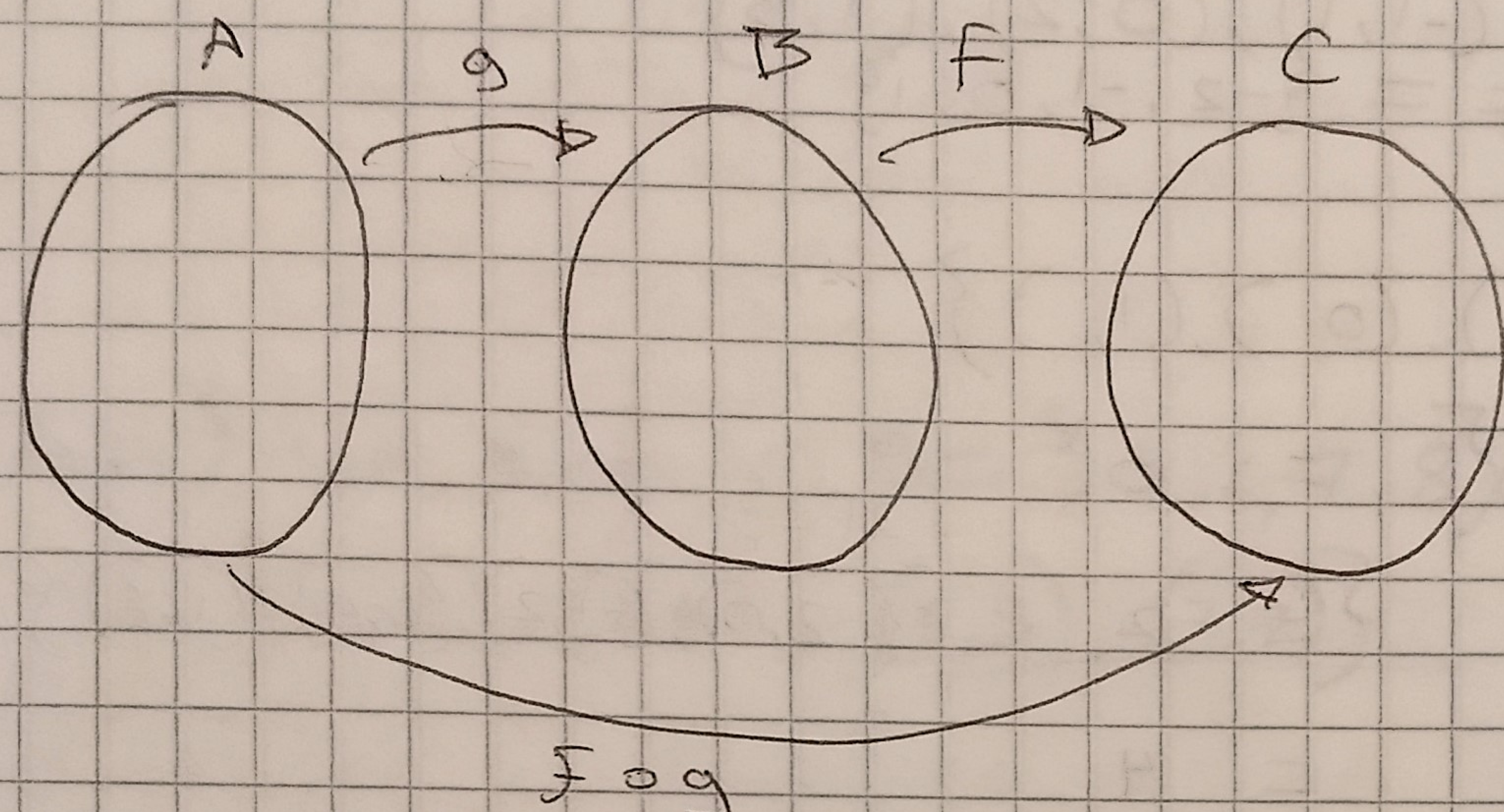
$D_{f/g} = D_f \cap D_g = \{-1, 0\}$

$f/g = \{(-1, \ )\}$

-1

$\frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{1}{1} = 1$

Composición de Funciones
(Técnica → Mapeo es Grafica)

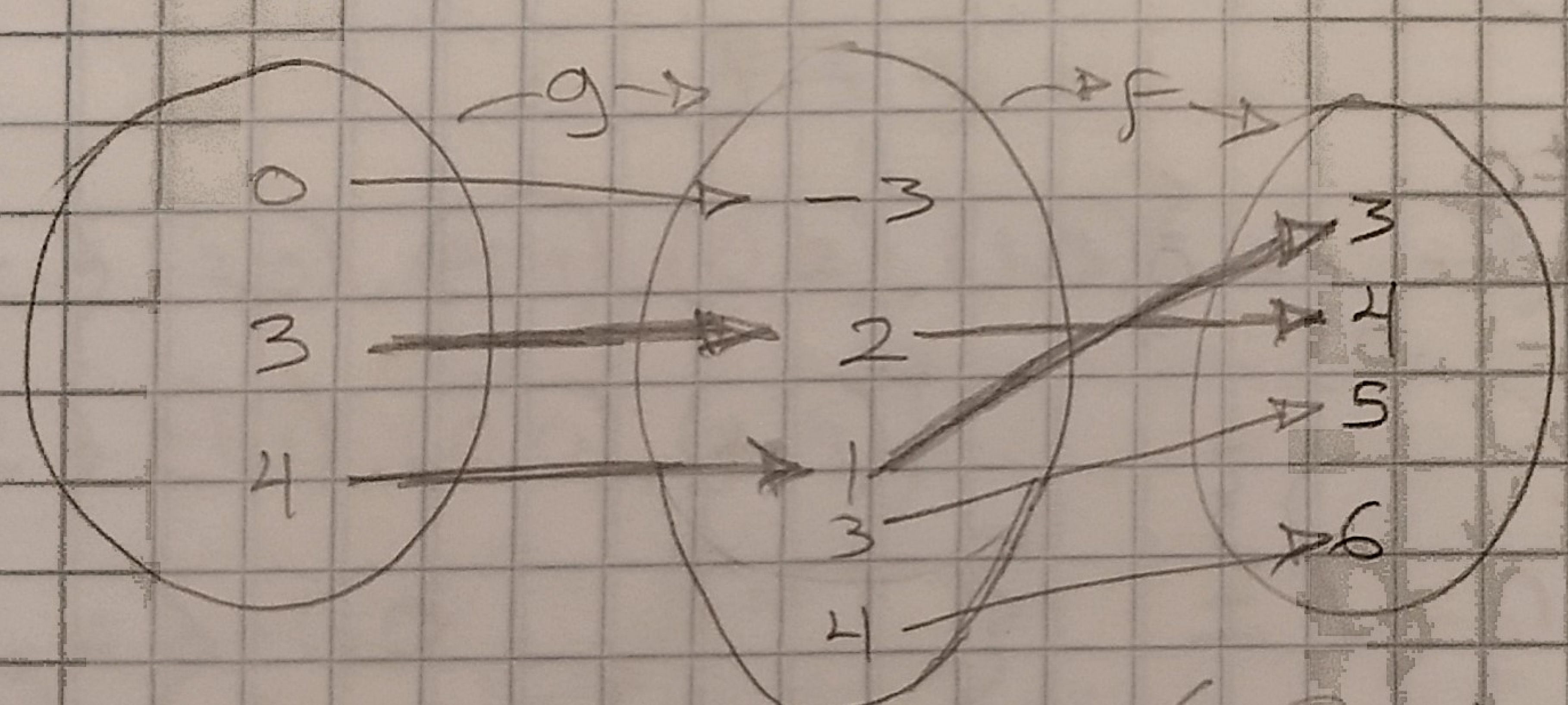


Si "g" tiene dominio en A y rango en B, y "F" tiene dominio en B y rango en C, entonces Fog tiene dominio en A y rango en C

Ejr:

$f = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$

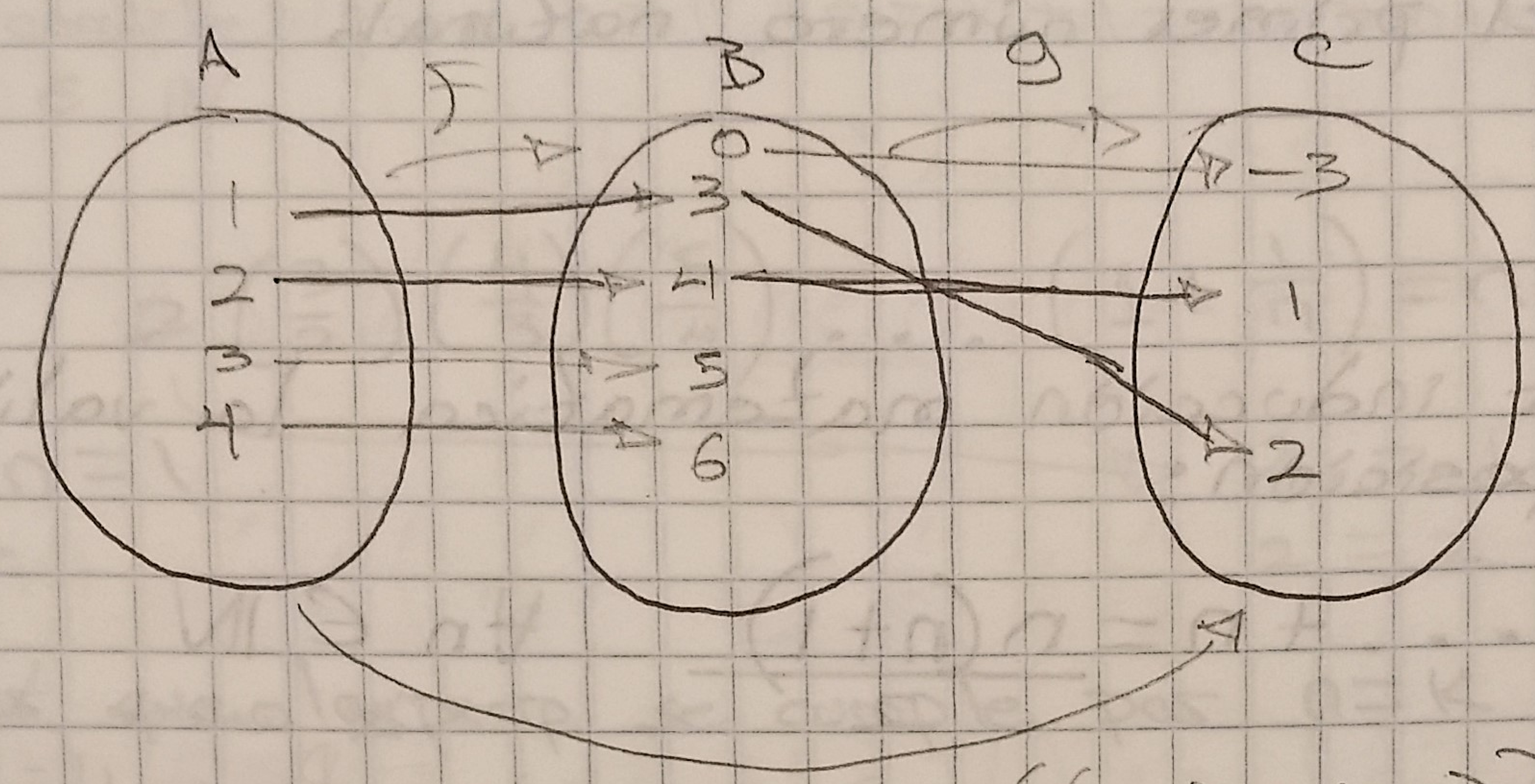
$g = \{(0,-3), (3,2), (4,1)\}$



Las líneas que continúan

$(f \circ g) = \{(3,4), (4,3)\}$

Ej 5



$g \circ f = \{(1,2),(2,1)\}$

Cambia el texto:
Si "f" tiene dominio en A y rango en B, y "g" tiene dominio en B y rango en C, entonces $g \circ f$ tiene dominio en A y rango en C.

$f = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$

$g = \{(0,-3),(3,2),(4,1)\}$

Postulados de Peano - Inducción Matematica

1) $1 \in \mathbb{N}$

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un numero unico $n^* \in \mathbb{N}$ (el siguiente de n)

3) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n^* \neq 1$

4) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m^* = n^*$, entonces $m = n$

5) Todo subconjunto S del conjunto de los $\mathbb{N}$ tal que: $S \subset \mathbb{N}$

a) $1 \in S$

b) $k \in S \Rightarrow k^* \in S$

entonces es el mismo conjunto de los numeros naturales

finalmente el S es el $\mathbb{N}$

El 1 es el primer número natural.
Peano
Base para →

Demostrar por inducción matematica la validez de la sig. proposición:

series numericas

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quiere decir
Para n = 1

Para n = 1

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}$$

Suponer que la proposición se cumple para $n=K$
subrayar = facilidad
Hipotesis

$$1+2+3+\ldots+\underline{K}=\frac{K(K+1)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Verificar si la prop. se cumple $n=K+1$

$$1+2+3+\ldots+K+(K+1)=\frac{(K+1)((K+1)+1)}{2}$$

desarrollar

$$=\frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

$$=\frac{(K^2+3K+2)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Comparar (1) y (2) sumarle a la (1) el témino $(K+1)$ en ambos lados

se agreg $(K+1)$

$$1+2+3+\ldots+K+(K+1)=\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)$$

$$=\frac{K^2+K+2K+2}{2}$$

$$=\frac{K^2+3K+2}{2} \rightarrow \text{Que es } (2)$$

Si se cumple para $n=1$, $n=k+1$ entonces se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Ej ($2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Para $n=1$ $\Rightarrow$ $2 = 1+1$

$2=2 \rightarrow$ se cumple

Suponer que la prop. se cumple par $n=k$ Hipotesis

$$2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=k+1 \quad \cdots \quad 1$$

Verificar si la prop. se cumple para $n=k+1$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=k+2 \quad \cdots \quad 2$$

Comparar la 1 y la 2 ; multiplicarle a la 1 el termino $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$ en ambos lados

$$2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=(k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=(k+1)\left(\frac{k+1+1}{k+1}\right)$$

$$=\cancel{(k+1)}\left(\frac{k+2}{\cancel{k+1}}\right)$$

$$=k+2$$

Si se cumple para $n=1$, $n=k$ y $n=k+1$ por lo tanto se cumplira para todas $n \in \mathbb{N}$
$\forall$

En examen hay que escribir todo.

Ej. Tarea. Demostrar por Inducción Matemática la validez de la sig. proposición.

$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$1+4+7+\dots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dots+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right) \forall n \in \mathbb{N}$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2 \; ; n \in \mathbb{N}$

Naturales (+)

- Cerradura

$\forall a,b \in \mathbb{N}$ se cumple que

$a+b \in \mathbb{N}$

el $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la op. suma

Naturales $(\cdot)$

- Cerradura

$\forall a,b \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$a \cdot b \in \mathbb{N}$

el $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la op. multp.

Ej. $\dfrac{n^3-n}{3} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq 2 \; ; n \in \mathbb{N}$

para $n=2$

$\dfrac{2^3-2}{3}=2 \in \mathbb{N}$

Se cumple

suponer q' la proposición se cumple para $n=K$ Hipótesis

$\dfrac{K^3-K}{3} \in \mathbb{N} \; \dots\dots \; (1)$

Verificar si la proposición se cumple para $n=K+1$

$\dfrac{(K+1)^3-(K+1)}{3}$

$$\frac{k^3+3k^2+3k+1-(k+1)}{3} = \frac{k^3+3k^2+3k+1-k-1}{3}$$

Separar los términos que se parecen a la hipótesis.

$$\frac{k^3-k}{3} + \frac{3k^2+3k}{3}$$

$$\frac{3k^2+3k}{3} = \frac{3(k^2+k)}{3} = k^2+k$$

$$\frac{k^3-k}{3} \in \mathbb{N}$$

$k^2+k \in \mathbb{N}$

por hipótesis

el $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la ops del prod. y la suma ∴ $k^2+k \in \mathbb{N}$

∴ al sumarse dos naturales da un natural

Si se cumple para $n=2$, $n=k$, $n=k+1$

∴ se cumplirá $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

Ejr:

$$\cos(\theta+\pi n) = (-1)^n \cos\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sabiendo que $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

hasta desigualdades

$3^n > 3n \quad \forall n \geq 2 ;\ n \in \mathbb{N}$

para $n=2$

$3^2 > 3(2)$

$9 > 6$ se cumple

Suponer q' la prop se cumple para $n=K$ → Hipotesis

$3^K > 3K \quad \ldots (1)$

Verificar si la prop. se cumple para $n=K+1$

$3^{K+1} > 3(K+1)$

$3^{K+1} > 3K+3 \quad \ldots (2)$

comprobar (1) y (2) multiplicale a la (1) el termino 3^1 en ambos lados

$3^K \cdot 3^1 > 3K(3^1)$

$3^{K+1} > 9K \quad \ldots (1^*)$

Analisis (lado derecho)

$9K \ ? \ 3K+3$ (1^*) y (2)

$9K > 3K+3$

De la 1^* Si $3^{K+1} > 9K > 3K+3$

Entonces por la prop. trans. de las propiedades se tiene $3^{K+1} > 3K+3$ q' es la (2)

$\therefore$

si se cumple

para $n=2$, $n=K$, $n=K+1$ entonces

se cumplira $\forall n \geq 2 ;\ n \in \mathbb{N}$

Ejr.

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $n=1$ $\quad 1 = \frac{1[3(1)-1]}{2} = 1$

Para $n=K$

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3K-2) = \frac{K(3K-1)}{2} \quad \dots (1)$$

Para $n = K+1$ ← siempre poner este término

$$1 + 4 + 7 + \overset{+(3K-2)}{\dots} + (3(K+1)-2) = \frac{(K+1)(3(K+1)-1)}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + (3K-2) + (3K+1) = \frac{(K+1)(3K+3-1)}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + (3K-2) + (3K+1) = \frac{(K+1)(3K+2)}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + (3K-2) + (3K+1) = \frac{3K^2 + 2K + 3K + 2}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + (3K-2) + (3K+1) = \frac{3K^2 + 5K + 2}{2} \quad \dots (2)$$

Comparar ① y ②; sumarle a la ① el término $(3K+1)$ en ambos lados

$$1 + 4 + 7 + \dots (3K-2) + (3K+1) = \frac{K(3K-1)}{2} + (3K+1) \quad \dots (1^*)$$

En desig dades paracione o cerrad

$$1 + 4 + 7 + \dots (3K-2) + (3K+1) = \frac{3K^2 - K}{2} + 3K+1$$

$$1 + 4 + 7 + \dots (3K-2) + (3K+1) = \frac{3K^2 - K + 6K + 2}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3K-2) + (3K+1) = \frac{3K^2 + 5K + 2}{2} \Rightarrow \text{que es la ②}$$

∴ Se cumple para $n=1$, $n=K$, $n=K+1$
se cumple para $\forall n \in \mathbb{N}$

Estructuras Algebraicas

(Campo, Espacio Vectorial, Grupo, Grupo Abelidad, Anillo, Dominio Enero, semiGrupo, Monoide, etc)

Protagonistas

Conjuntos $\neq \emptyset$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Son Finitos o Infinitos

Matrices
Polinomios
Vectores
Funciones Continuas de valiable Real
Letras

- Operaciones
  - Suma
  - Multiplicación
  - Producto de un Escalar por un vector
  - Suma entre (vectores)

Operaciones $*, \sqcap, \circledcirc$ } siguen una cierta regla

- Cumplimiento de Propiedades
  - commutativa
  - Asociativa
  - cerradura
  - Existencia de Elemento identico ó Neutro
  - Existencia de Elemento inverso ó simétrico
  - Distributiva

Sistema $(\mathbb{N}, +)$

Sistema de 2 Operaciones $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Sistemas que estan Formados solamente por un conjunto y una operación. $(S, *)$

Son:
- Semigrupo: se debe cumplir: cerradura
- Semigrupo Conmutativo: cerradura, Asoc. Conmut.
- Semigrupo Con Unidad = cerradura, Asoc, exst. el Id. = monoide
- Semigrupo Con Unidad Conmutativo ó monoide Conmutativo: cerradura Asoc. Exist Elem. Id, conmt
- Grupo: cerradura, Asoc, exist el Id, Exist el inverso
- Grupo Abeliano: Cerr, Asoc, Exst, el Id, Exst el inverso, conm.

Sino se cumple la cerradura, no hay estructuras algebraicas.

Cuando se tiene un cjto y 2 operaciones: $(S, *, \square)$

- Anillo:
  - $(S, *)$ sea grupo Abeliano — Primera operación
  - Bajo la 2^a op $\square$ el S sea cerrado
  - La 2^a op $\square$ sea Asociativa
  - La 2^a op $\square$ sea distributiva sobre la 1^a op $*$ tanto por la izq como por la derecha
- Anillo Conmutativo
- Anillo unitario
- Anillo Commt unit
- Dominio Entero
- Campo

- Anillo Conmutativo: $(S, *, \square)$ Sea Anillo
  La 2^a Op $\square$ sea conmutativa
- Anillo Unitario: $(S, *, \square)$ Sea anillo
  Exista el Idéntico o bajo la 2^a op.
- Anillo Conmutativo o Unitario:
  $(S, *, \square)$ Sea Anillo
  La 2^a op sea conmt
  Exista el Ident, bajo la 2^a Op.

- Dominio

Entero:

- $(S, *, \square)$ sea Anillo comtvo. Unitario
- No deben existir Divisores propios de cero

- Campo:

$(S, *)$ Sea grupo abeliano

$(S, \square)$ Sea Grupo Abeliano, tanto por la izq. como por la derecha

La 2ª op $\square$ sea Distributiva sobre la 1ª op $*$ tanto por la izq. como por la derecha.

Propiedades (Def).

- Cerradura: Sea $a, b \in S$, $(*)$ la op.

$a * b \in S$; el Conj. S es cerrado bajo la operación $*$

- Asociativa: Sea $a, b, c \in S$

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

- Conmutativa $a, b \in S$

$$a * b = b * a$$

- Existencia Elemento Idéntico

Sea $a \in S$, $\mathcal{U}_e$ el idéntico, donde $\mathcal{U} \in S$

$$a * \mathcal{U} = \mathcal{U} * a = a$$

$$a * \mathcal{U} = a = \mathcal{U} * a$$

Se debe cumplir:

1) $a * \mathcal{U} = a$ existe?

2) $\mathcal{U} * a = a$ es correcto?

3) $\mathcal{U} \in S$ Pertenece al conjunto?

- Existencia de elemento Inverso

Sea $a \in S$, $\hat{a}$ / a' / $\hat{u}$ el inverso, $\hat{a} \in S$

$a * \hat{a} = \hat{a} * a = u$

ó

$a * \hat{a} = u = \hat{a} * a$

1) $a * \hat{a} = u$ 2) $\hat{a} * a = u$ 3) $\hat{a} \in S$

- Si no se cumple identico tampoco inverso.
- Identico: solo hay uno.

$(\mathbb{N}, +)$

Semigrupo Conmutativo

Cerradura, $\forall a, b \in \mathbb{N}$ se cumple que: $a+b \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la operación suma.

Asociativa $\forall a, b \in \mathbb{N}$, se cumple q' $a+(b+c) = (a+b)+c$

la operación suma es asociativa en el $\mathbb{N}$

- conmutativa

$\forall a, b \in \mathbb{N}$ se cumple $a+b = b+a$ ~~$\neq b+a$~~

la operación suma es conmutativa en el $\mathbb{N}$.

E. Elemento Identico

No existe elemento idéntico en el $\mathbb{N}$ bajo la operación suma (por que el cero no es número natural)

E. Elemento Inverso

No existe por que no hay elemento Identico

$(\mathbb{N}, \cdot)$ Semigrupo Unitario Conmutativo

→ **Cerradora**

$\forall a,b \in \mathbb{N}$ se cumple que: $a \cdot b \in \mathbb{N}$ el $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la op multiplicación

→ **Asociativa**

$\forall a,b,c \in \mathbb{N}$ se cumple que: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

la op. multp. es Asociativa en el $\mathbb{N}$

→ **Conmutativa**

$\forall a,b \in \mathbb{N}$ se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$

la op. multp. es conmutativa en el $\mathbb{N}$

→ **Existencia del elemento identico**

Sea $a \in \mathbb{N}$

1) $a \cdot \mu = a$

$\mu = a/a = 1$

2) $\mu \cdot a = a$

$1 \cdot a = a$

$a = a$

3) $\mu \in \mathbb{N}$

$\mu = 1 \in \mathbb{N}$

Existe el identico $\mu = 1 \in \mathbb{N}$ bajo la op. multp.

→ **Existe el inverso**

Sea $a \in \mathbb{N}$; $\hat{a}$ el inverso

$\hat{\mu}$

a'

$(\mathbb{N}, +)$

semigrupo conmt.

$(\mathbb{N}, \cdot)$

semigrupo con unidad conmutativa

1) $a \cdot \hat{a} = \mu$

$a \cdot \hat{a} = 1$

$\hat{a} = \frac{1}{a} \notin \mathbb{N}$

2) $\hat{a} \cdot a = \mu$

3) $\hat{a} \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{Z}, +)$ Grupo Abeliano

No existe ~~el~~ inverso en el $\mathbb{N}$ bajo la op. multp.

Anillo : $(S, *, \square)$

- $(S, *)$ Grupo Abeliano $(\mathbb{N}, +)$

$(\mathbb{Z}, +)$ Grupo Abeliano

$(\mathbb{Z}, +)$ Cerradora ✓

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ se cumple que: $a+b \in \mathbb{Z}$

el $\mathbb{Z}$ es cerrada bajo la op. suma

Asociativa ✓

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ se cumple que: $a+(b+c) = (a+b)+c$

la operación suma es asociativa en el $\mathbb{Z}$

El Identico ✓

sea $a \in \mathbb{Z}$ $\quad \mu$ el identico

1) $a + \mu = a$ $\quad$ 2) $\mu + a = a$ $\quad$ 3) $\mu \in \mathbb{Z}$

$\mu = a - a = 0$ $\quad$ $0 + a = a$ $\quad$ $\mu = 0 \in \mathbb{Z}$

$a = a$

Existe El inverso ✓

sea $a \in \mathbb{Z}$ $\quad \hat{a}$ el inverso

1) $a + \hat{a} = \mu$ $\quad$ 2) $\hat{a} + a = \mu$ $\quad$ 3) $\hat{a} \in \mathbb{Z}$

$a + \hat{a} = 0$ $\quad$ $-a + a = 0$ $\quad$ $\hat{a} = -a \in \mathbb{Z}$

$\hat{a} = -a$ $\quad$ $0 = 0$

existe el inverso de la Forma

$\hat{a} = -a \in \mathbb{Z}$ bajo la op suma

- Conmutativa

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ se cumplira que:

$a+b = b+a$ $\quad$ la op suma es conmt en el $\mathbb{Z}$

$\therefore$ $\left.\begin{array}{l}\text{Cerradora}\\ \text{Asociativa}\\ \text{El identico}\\ \text{El inverso}\\ \text{Conmutativa}\end{array}\right\}$ Grupo Abeliano $(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ Monoide Conmutativo

- Cerradora:
  $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ se cumple que: $a \cdot b \in \mathbb{Z}$
  el $\mathbb{Z}$ es cerrada bajo la op. multp.

- Asociativa
  $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ se cumple que: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  la op. multp. es asociativa en el $\mathbb{Z}$

- Existe el Idéntico
  sea $a \in \mathbb{Z}$ μ el idéntico

1) $a \cdot \mu = a$
$\mu = \frac{a}{a}$
$\mu = 1$

2) $\mu \cdot a = a$
$1 \cdot a = a$
$a = a$

3) $\mu \in \mathbb{Z}$
$\mu = 1 \in \mathbb{Z}$

Existe el Idéntico $\mu = 1 \in \mathbb{Z}$ bajo la op. multp.

Cerradora
Asociativa
Idéntico
~~No inverso~~
Conmutativa

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ Monoide Conmutativo

Existe el Inverso
sea $a \in \mathbb{Z}$

1) $a \cdot \hat{a} = \mu$
$a \cdot \hat{a} = 1$
$\hat{a} = \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z}$

2) $\hat{a} \cdot a = \mu$

3) $\hat{a} \in \mathbb{Z}$

No existe el inverso en el $\mathbb{Z}$ bajo la op. multp.

- Conmutativa

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ se cumple que:

$a \cdot b = b \cdot a$

la op multp es es conmt en el $\mathbb{Z}$

$(S, *, \square)$ Propiedad Distributiva en un Sist. con 2 operaciones
Sea $a, b, c \in S$

- Distributiva por la izq 2ª op $\square$ sobre la 1ª op $*$
  $a \square (b * c) = (a \square b) * (a \square c)$

- Distributiva por la derecha 2ª op $\square$ sobre la 1ª op $*$
  $(b * c) \square a = (b \square a) * (c \square a)$

Distributiva
2ª op $(\cdot)$ sobre la 1ª op $(+)$

Izquierda
$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ se cumple que:
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Derecha
$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ se cumpla que:
$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$
la multp es distributiva sobre la suma en el $\mathbb{Z}$ tanto por la izq como por la derecha

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ → Anillo Conmutativo Unitario
→ Anillo con Unidad conmutativa

- Cero del Anillo es el identico bajo la 1ª OP

- Unidad del Anillo es el identico bajo la 2ª OP.