ce la ocurrencia del evento B y P(B/A) es la probabilidad de B una vez ocurrido el evento A. Si no ocurre lo anterior los eventos son dependientes.

SEGUNDA PARTE.

En la primera parte se mencionó que si los eventos A y B son independientes, la probabilidad compuesta de A y B es el producto de sus probabilidades individuales.

Ahora si los eventos A y B son dependientes, la probabilidad compuesta de A y B ya no será igual al producto de sus probabilidades particulares. Por este hecho, ninguna de las fórmulas anteriores se satisfacen puesto que aquí la ocurrencia de un evento afecta la probabilidad de la ocurrencia del otro.

Como *REGLA GENERAL DE MULTIPLICACION* se dice que la probabilidad compuesta de dos eventos dependientes es igual a la probabilidad de un evento multiplicado por la probabilidad condicional del otro, esto es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

Por medio de estas fórmulas se pueden determinar las anteriores que se obtuvieron para eventos independientes, es decir, si A y B son independientes se tiene $P(B/A) = P(B)$ y $P(A/B) = P(A)$ y las fórmulas pasan a ser las que se describieron en la primera parte.

Por otro lado, podemos determinar la probabilidad condicional de B dado que A se ha presentado, sólo basta despejar de la primera fórmula P(B/A), esto es

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Similarmente, la probabilidad condicional de A dado que B se ha presentado es

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

TEOREMA DE BAYES.

El teorema de Bayes es una fórmula para determinar probabilidades condicionales.

El teorema se aplica a eventos diferentes donde al menos uno de ellos se sabe que ha ocurrido.

Primero escribiremos el Teorema de Bayes para tres eventos diferentes e inmediatamente la fórmula general.

Sean $B_1B_2B_3$ tres eventos diferentes de los que al menos uno de ellos se sabe que ha ocurrido. Supóngase que con cualquiera de éstos puede presentarse otro evento A que se sabe también que ha ocurrido. Si todas las probabilidades $P(B_1), P(B_2), P(B_3)$ y $P(A/B_1), P(A/B_2), P(A/B_3)$ son conocidas se tiene que

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)}$$

Resultados similares se pueden obtener para $P(B_2/A)$ y $P(B_3/A)$.

La fórmula general es

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(B_j)P(A/B_j)}$$

$i = 1,2,\ldots,k$

Si un evento puede ocurrir en más de una forma, entonces la probabilidad de que suceda en una forma particular será igual a la razón de la probabilidad de que se presente la forma respecto a la probabilidad de que ocurra.

El Teorema de Bayes es mejor comprendido a través de los ejemplos.

EJEMPLOS.

[1] Sea el experimento de lanzar una moneda y sean los eventos

A : "Sol en el quinto lanzamiento"

B : "Sol en el sexto lanzamiento"

¿Cuál es la probabilidad de que se tenga sol en el quinto y sexto lanzamiento?

DEMOSTRACION.

Puesto que A y B son eventos independientes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

[2] Juan llega tarde a su casa para cenar el 25% de las veces. La cena se retrasa el 10% de las

veces. Si los dos eventos no están relacionados. ¿Qué probabilidad hay de que ambos ocurran?

DEMOSTRACION.

P(ambos se retrasen) = P(Juan se retrase)P(La cena se retrase)

$= (0.25)(0.10) = 0.025 = 2.5\%$

[3] Sea el experimento de lanzar un dado y sean los eventos

A : "El número es menor que 5"

B : "El número es par"

C : "El número es impar"

D : "El número es par menor que 5"

Determinar

(i) P(A/B) (ii) P(B/A) (iii) P(D/A)

DEMOSTRACION.

Podemos escribir los eventos como

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{2,4,6\}$

$C = \{1,3,5\}$

$D = \{2,4\}$

Determinemos la probabilidad de cada evento.

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Notar que

$A \cap B = \{1,2,3,4\} \cap \{2,4,6\} = \{2,4\} = D$

consecuentemente

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(i) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 66.6\ \%$$

(ii) $$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

(iii) $$P(D/A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

[4] En un cajón hay tres bolas blancas y dos bolas negras. Sean los eventos

A : "La primera bola extraída es negra"

B : "La segunda bola extraída es negra"

en extracciones sin remplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean negras?.

DEMOSTRACION.

$$P(A) = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$ Probabilidad de que la primera bola extraída sea negra

$$P(B/A) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$ Probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra, dado que la primera extracción fue de bola negra.

La probabilidad de que ambas bolas extraídas sean negras es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

[5] Una bolsa contiene 10 transistores, 3 de los cuales están defectuosos. Se extraen 2 transistores al azar.

(a) Hallar la probabilidad del evento tal que ninguno de los 2 transistores esté defectuoso.

(b) Se extraen 3 transistores sin reemplazo. ¿Encontrar la probabilidad del evento tal que los tres transistores no estén defectuosos?

(c) Hallar la probabilidad del evento tal que los dos primeros transistores extraídos no estén defectuosos y el tercero si lo esté.

DEMOSTRACION.

(a) Extracciones sin reemplazo.

E : "Los dos transistores son no defectuosos"

A : "El primer transistor elegido no está de - fectuoso"

B : "El segundo transistor elegido no está defectuoso"

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{7}{10}\frac{6}{9} = \frac{42}{90} = .46$$

$$= 46.6\,\%$$

Extracciones con reemplazo

$$P(E) = P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{7}{10}\frac{7}{10} = \frac{49}{100} = .49$$

$$= 49\,\%$$

(b) $$P(E) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B) =$$

$$= \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{5}{8} = \frac{210}{720} = \frac{21}{72} = .29 = 29\,\%$$

(c) $$P(E) = P(A \cap B \cap D) = P(A)P(B/A)P(D/A \cap B) =$$

$$= \frac{7}{10}\frac{6}{9}\frac{3}{8} = \frac{126}{720} = 0.175 = 17.5\,\%$$

[6] Sea el experimento de lanzar dos dados y sean los eventos

A : "El primer dado es un 5"

B : "El total es 7"

C : "El total es 10"

Demostrar que

(a) $P(B/A) = P(B)$ (b) $P(C/A) \neq P(C)$

(c) $P(A/B) = P(A)$

DEMOSTRACION.

Si observamos el espacio muestral que determinamos en la página 73, se tiene que los eventos A, B y C equivalen a

$A = \{(51),(52),(53),(54),(55),(56)\}$

$B = \{(61),(52),(43),(34),(25),(16)\}$

$C = \{(64),(55),(46)\}$

en consecuencia

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(a) $A \cap B = \{(52)\}$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto $\quad P(B/A) = P(B)$

(c) $A \cap C = \{(55)\}$

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto

$$P(C/A) \neq P(C)$$

(c)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto

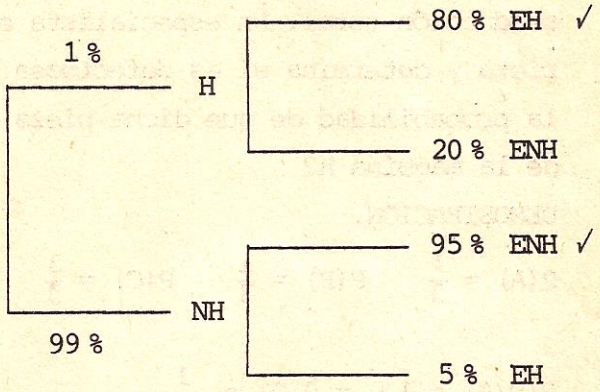
$$P(A/B) = P(A)$$

[7] Teorema de Bayes.

Para determinar si una persona tiene hepatitis se le hace un examen de sangre de cierto tipo. La aceptación de este procedimiento se basa en lo siguiente: entre personas con hepatitis, el 80 % de los examenes de sangre descubren la en-

fermedad; pero el 20 % fallan al hacerlo. Entre personas sin hepatitis, el 5 % diagnostican erradamente como casos de hepatitis y el 95 % de los examenes dan el diagnóstico correcto. Tomemos una persona cualquiera de un número grupo de los cuales un 1 % tiene hepatitis y que en un examen de sangre muestra que esa persona tiene hepatitis. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga la enfermedad?

DEMOSTRACION



H - UNA PERSONA TIENE HEPATITIS.

NH - UNA PERSONA NO TIENE HEPATITIS.

EH - EXAMEN DE HEPATITIS

EH ✓ - EXAMEN DE HEPATITIS CORRECTO (NO FALLA)

$$P(H/EH) = \frac{P(H)P(EH/H)}{P(H)P(EH/H)+P(NH)P(EH/NH)} =$$

$$= \frac{(0.01)(0.8)}{(0.01)(0.8)+(0.99)(0.05)}$$

$$= \frac{0.008}{0.057} = 0.139$$

[8] Teorema de Bayes.

Tres máquinas en una fabrica de vidrio, producen piezas de adorno. La máquina A produce el 1% de piezas defectuosas, la máquina B produce el 2% de piezas defectuosas y la máquina C el 5% de piezas defectuosas.

Cada máquina produce la tercera parte de la producción total. Un especialista examina una pieza y determina si es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha pieza halla salido de la máquina A?

DEMOSTRACION.

$$P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(C) = \frac{1}{3}$$

$$P(D/A) = 1\% = 0.01 = \frac{1}{100}$$

$$P(D/B) = 2\% = 0.02 = \frac{2}{100}$$

$$P(D/C) = 5\% = 0.05 = \frac{5}{100}$$

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)} =$$

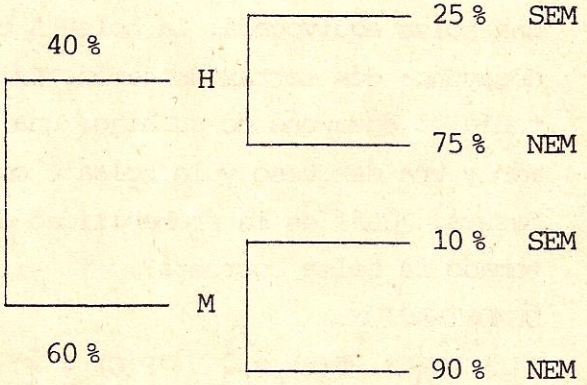
$$= \frac{\frac{1}{3}\,\frac{1}{100}}{\frac{1}{3}\,\frac{1}{100} + \frac{1}{3}\,\frac{2}{100} + \frac{1}{3}\,\frac{5}{100}} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{8}{300}} = \frac{1}{8}$$

$$= 0.125 = 12.5\,\%$$

[9] Teorema de Bayes.

En cierta escuela superior, 25 % de los alumnos y 10 % de las alumnas son estudiantes de medicina. Las mujeres constituyen el 60 % de los hombres. Si se selecciona al azar un estudiante y resulta ser de medicina, determinar la probabilidad de que el estudiante sea una alumna.

DEMOSTRACION.



SEM - SI ESTUDIAN MEDICINA.

NEM - NO ESTUDIAN MEDICINA

Resolveremos este problema por 2 métodos.

Método I

$$P(M/SEM) = \frac{P(E \cap SEM)}{P(SEM)} = \frac{.06}{.16} = \frac{3}{8}$$

Método II Teorema de Bayes.

$$P(M/SEM) = \frac{P(M)P(SEM/M)}{P(M)P(SEM/M)+P(H)P(SEM/H)} =$$

$$= \frac{(.60)(.10)}{(.60)(.10)+(.40)(.25)} = \frac{.06}{.16} = \frac{3}{8}$$

[10] Teorema de Bayes.

Supongasé que al salir de su hogar, toma una de las tres bolsas que están sobre la mesa y se dirige a su trabajo. Por la prisa que lleva se le ocurre pensar que pudo haber tomado una bolsa equivocada. La bolsa A contenía su desayuno: dos tortas de jamón. La bolsa B contenía el desayuno de su hijo: una torta de jamón y una de queso y la bolsa C contenía la basura. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado la bolsa correcta?.

DEMOSTRACION.

$P(A) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{1}{3}$ $P(C) = \frac{1}{3}$

$P(D/A) = 100\ \% = 1.00$

$P(D/B) = 50\ \% = 0.50$

$P(D/C) = 0\ \% = 0.00$

P(desayuno correcto/torta de jamón) =

$$= \frac{P(\text{torta de jamón de la bolsa correcta})}{P(\text{todas las formas de obtener una torta de jamón})}$$

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(1.00)}{\frac{1}{3}(1.00) + \frac{1}{3}(0.50) + \frac{1}{3}(0.00)} = \frac{2}{3}$$

VARIABLES ALEATORIAS-FUNCIONES DE DISTRIBUCION

VARIABLE ALEATORIA.

Sea un experimento aleatorio y S el espacio muestral asociado con el experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos del espacio muestral, un número real X(s), se le conoce como *VARIABLE ALEATORIA*.

Recordemos que un espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio determinado.

En los conceptos que ahora estamos tratando se emplea el concepto de función, por ello es importante recordar la definición.

DEFINICION. Sean A y B dos conjuntos.

Si a cada elemento del conjunto A (Domi-

nio de la función) le asociamos un y sólo un elemento del conjunto B (Contradominio de la función) se dice que existe una función definida de A en B.

Consecuentemente una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral de un experimento aleatorio. Consideremos el siguiente ejemplo. Se lanza una moneda en tres ocasiones y se observa la cantidad de águilas que aparecen.

DEMOSTRACION.

El espacio muestral es

$$S = \{SSS, SSA, SAS, ASS, SAA, ASA, AAS, AAA\}$$

$$X[SSS] = X_1 = 0$$

$$X[SSA, SAS, ASS] = X_2 = 1$$

$$X[SAA, ASA, AAS] = X_3 = 2$$

$$X[AAA] = X_4 = 3$$

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Entonces para precisar, decimos que si los valores que toma una variable X están relacionados a los eventos aleatorios elementales en el espacio muestral S de un experimento dado, la variable X se le conocerá como *VARIABLE ALEATORIA*.

Volviendo al concepto de función, si x_1 es un elemento del conjunto A (Dominio) y a éste le corresponde un y sólo un elemento del conjunto B (Contradominio) digamos y_1, esto se conoce en el Cálculo

como : "La imagen de x_1 es y_1" y así para cada elemento. El conjunto de todas las imagenes recibe el nombre de Rango de la Función. Utilizamos esto para explicar el porqué del concepto siguiente.

El espacio R_x es el conjunto de todos los valores posibles de la variable aleatoria X, es decir, su Rango. Para el ejemplo anterior, el rango es el conjunto $\{0,1,2,3\}$. Debe observarse que R_x está contenido en los reales.

Al rango de una variable aleatoria se le considera también como un espacio muestral.

FUNCION DE PROBABILIDAD.

Es aquella cuyo dominio es el rango de la variable aleatoria, o bien, la función de probabilidad es una función definida en el rango de la variable aleatoria. Se representa por f(x) donde x indica los valores que toma la variable aleatoria.

Si consideramos el ejemplo anterior, se tendrá que la función de probabilidad estará definida como

$$X[SSS] = 0 \text{ ---------- } f(0) = \frac{1}{8}$$

$$X[SSA] = X[SAS] = X[ASS] = 1 \text{ --- } f(1) = \frac{3}{8}$$

$$X[SSA] = X[ASA] = X[AAS] = 2 \text{ --- } f(2) = \frac{3}{8}$$

$$X[AAA] = 3 \text{ ---------- } f(3) = \frac{1}{8}$$

Observar que el rango de está función siempre será el intervalo cerrado $[0,1]$ es decir $R_f \in [0,1]$

Esto debe ser así, debido a que la probabilidad de cualquier evento se representa mediante un valor que puede variar de 0 a 1.00. En otras palabras, la probabilidad de un evento se puede considerar una función porqué a cada valor distinto posible de una variable aleatoria X, que en verdad es un evento le corresponde un número real y sólo uno entre 0 y 1 incluídos y que se llama su probabilidad.

Para una mayor comprensión observemos la siguiente figura del ejemplo que hemos venido desarrollando.

	X		f	
SSS	----	$X(SSS)=0$	----	$f(0)=\frac{1}{8}$
SSA	----	$X(SSA)=1$		
SAS	----	$X(SAS)=1$	----	$f(1)=\frac{3}{8}$
ASS	----	$X(ASS)=1$		
SAA	----	$X(SAA)=2$		
ASA	----	$X(ASA)=2$	----	$f(2)=\frac{3}{8}$
AAS	----	$X(AAS)=2$		
AAA	----	$X(AAA)=3$	----	$f(3)=\frac{1}{8}$
		$R_x \in R$		$R_f \in [0,1]$

FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES.

Finalmente, se tiene que una función de distribución

de probabilidades, es una función definida en el rango de la función de probabilidad. Está función de distribución de probabilidades también se le conoce como función de probabilidad acumulada. Esta se representa por F(x), donde x indica los valores que toma la variable aleatoria.

En notación matemática formal se tiene

FUNCION VARIABLE ALEATORIA $X : S \longrightarrow R_x$

FUNCION DE PROBABILIDAD $f : R_x \longrightarrow [0,1]$

o bien $P : X \longrightarrow [0,1]$

FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES

$F : R_f \longrightarrow [0,1]$

En la primera parte de este libro, se analizó que una distribución de frecuencias consiste en asignar a cada marca de clase su correspondiente frecuencia. Ahora sucede algo similar, esto es, una distribución de probabilidad consiste en asignar a cada valor de una variable aleatoria su correspondiente probabilidad. Además una distribución de probabilidad se puede conocer mediante sus medidas de tendencia central y sus medidas de dispersión, de las cuales nos interesan la media aritmética (en probabilidad llamada Esperanza Matemática o Valor esperado) y la Variancia.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Una variable aleatoria es discreta si los valores

que toma se pueden contar, es decir, proviene de un espacio muestral numerable finito o infinito.

Una definición más formal es

DEFINICION. Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (es decir, su rango) es finito o infinito numerable se dice que X es una *VARIABLE ALEATORIA DISCRETA*. Esto es, se pueden anotar los valores posibles de X como $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ y la lista de ellos dependerá del total de valores.

Tomando en consideración lo que hemos descrito en parrafos anteriores se tiene la siguiente

DEFINICION. Sea X una variable aleatoria discreta. Por consiguiente el rango de X consta a lo más, de un número de valores $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ infinito numerable. A cada resultado posible x_i asociamos un número $f(x_i) = P(X = x_i)$ conocido como la probabilidad de x_i.

Los números $f(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$ deben satisfacer las siguientes condiciones

(i) $f(x_i) \geqslant 0$ para toda i

(ii) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

La función f definida de está forma como hemos visto se le conoce como función de probabilidad de la va-

riable aleatoria X. La distribución de probabilidad de X será la colección de pares $[x_i, f(x_i)]$ con $i=1,2,.$

VALOR ESPERADO O ESPERANZA MATEMATICA.

Si una variable aleatoria X asume los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con las probabilidades correspondientes $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$ entonces el *VALOR ESPERADO* de X(esperanza matemática de X) representada por E(X), o bien por μ, se define como

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n)$$

Esto es, el valor esperado de la variable aleatoria discreta X es igual a la suma de los productos de todos los valores posibles de X multiplicados por sus respectivas probabilidades. Es igual a la media de la población de X o sea μ.

PROPIEDADES. Sean a,b y c constantes. Se tiene que

$E(c) = c$

$E(cX) = cE(X)$

$E(a+bX) = a + bE(X)$

Si $X \geqslant Y$ entonces $E(X) \geqslant E(Y)$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

La media de la suma de dos o más variables aleatorias es igual a la suma de las medias de dichas variables.

VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Sea X una variable aleatoria. Definimos la varianza de X, representada por V(X) o bien, σ^2 como

$$V(X) = \sigma^2 = E[X - E(X)]^2$$

Recordemos de la primera parte de este libro, que la raíz cuadrada positiva de V(X) se conoce como la desviación estándar de X. La representaremos por σ. Para determinar con mayor facilidad la variancia es mejor emplear el siguiente resultado que se deduce de la fórmula anterior

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

o

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - [\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)]^2$$

o bien

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

PROPIEDADES.

(i) Si c es una constante $V(X+c) = V(X)$

(ii) La variancia de la suma de dos o más variables aleatorias, es la suma de las variancias de dichas variables

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Una variable aleatoria se considera continua si puede tomar cualquier valor dentro de un determinado in-