tervalo. Entonces se puede decir que una variable aleatoria continua proviene de un espacio muestral infinito no numerable.

Cuando la variable aleatoria es continua, las fórmulas que analizamos en variables aleatorias discretas sufren modificaciones, la más importante es la sustitución de las sumatorias por integrales; sin embargo, en los modelos teóricos usuales para distribuciones de probabilidad de variable aleatoria que se verán en el siguiente capítulo, se acudira al uso de tablas que evitan cálculos matemáticos complejos.

Una definición más formal de variable aleatoria continua es

DEFINICION. Se dice que X es una *VARIABLE ALEATORIA CONTINUA* si existe una función f llamada función de probabilidad (está función también recibe el nombre de función de densidad de probabilidad), que satisface las siguientes condiciones

(i) $f(x) \geqslant 0$ (iii) $P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

Consideramos que X es una variable aleatoria cuyo conjunto imagen es un conjunto continuo de números tales como un intervalo cerrado $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

DEFINICION. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad f. El *VALOR ESPE-*

RADO de X se define como

$$E(X) = \mu = \int_a^b xf(x)dx$$

PROPIEDADES.

(a) Si X = c en donde c es una constante entonces

$E(X) = c$

DEMOSTRACION.

$$E(X) = \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx = c(1) = c$$

(b) $E(cX) = cE(X)$

DEMOSTRACION.

$$E(cX) = \int_a^b cxf(x)dx = c\int_a^b xf(x)dx = cE(X)$$

(c) Sean X y Y dos variables aleatorias cualquiera. Entonces

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Esto se puede generalizar para más de dos variables.

<u>VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.</u>

La variancia para variables aleatorias continuas viene dada por

$$V(X) = \sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx - [\int_a^b xf(x)dx]^2$$

o bien

$$V(X) = \sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx$$

La raíz cuadrada positiva de $V(X)$ nos dará el valor de la desviación estándar de X.

Las propiedades que una variable aleatoria discreta satisfacen, también son válidas para una variable aleatoria continua, es decir, la variancia de la suma de dos o más variables aleatorias es la suma de las variancias de dichas variables $V(X+Y) + V(X)+V(Y)$ y si c es una constante $V(X+c) = V(X)$. Además otra propiedad que es válida para ambos casos es que si c es una constante se tiene que $V(cX) = c^2V(X)$.

EJEMPLOS.

[1] Consideremos el experimento de lanzar una moneda. Determinar S, X, f, F.

DEMOSTRACION.

$S = \{A,S\}$

$X[A] = 0 = x_1$

$X[S] = 1 = x_2$

$X = R_X = \{0,1\}$

Por último determinamos f y F

$X = x_i$	0	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$

Notar que

$$F(x_1) = \sum_{x_i \leqslant x_1} f(x_i) = f(x_1) = \frac{1}{2}$$

$$F(x_2) = \sum_{x_i \leqslant x_2} f(x_i) = f(x_1)+f(x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2}{2}$$

Lo anterior se deberá considerar en cada uno de los siguientes ejemplos.

[2] Sea el experimento de observar en un hospital el sexo del primer recién nacido en un día determinado. Hallar S, X, f, F.

DEMOSTRACION.

$S = \{M,H\}$

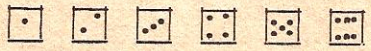
$X = R_X = \{0,1\}$

Ahora obtenemos f y F.

$X = x_i$	0	1
$f(x_i)$	1/2	1/2
$F(x_i)$	1/2	2/2

[3] Sea el experimento de lanzar un dado. Hallar S, X, f, F.

DEMOSTRACION.

S = {  }

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ahora obtenemos f y F.

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

[4] Sea el experimento de lanzar dos dados y observar la suma de puntos que aparecen en las dos caras superiores. Hallar S, X, f, F.

DEMOSTRACION.

El espacio muestral S lo tenemos en la página 73.

$X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Obtenemos f y F

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } x = 2,12 \\ \frac{2}{36} & \text{si } x = 3,11 \\ \frac{3}{36} & \text{si } x = 4,10 \\ \frac{4}{36} & \text{si } x = 5,9 \\ \frac{5}{36} & \text{si } x = 6,8 \\ \frac{6}{36} & \text{si } x = 7 \end{cases}$$

Esto es

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

[5] Consideremos el nacimiento de un pequeño en donde los resultados niño o niña son igualmente posibles y los nacimientos son independientes. Hallar S, X, f, F. De la variable aleatoria "número de niños que nacen en tres partos normales"

DEMOSTRACION.

S = {MMM,MMH,MHM,HMM,MHH,HMH,HHM,HHH}

X = {0,1,2,3}

Ahora obtenemos f y F

$X = x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(x_i)$	1/8	4/8	7/8	8/8

[6] Sea F(x) la función de distribución de una variable aleatoria continua definida de la siguiente forma

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \frac{x}{2\pi} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 2\pi \\ 80 & \text{si} \quad x > 2\pi \end{cases}$$

Determinar la función de probabilidad $f(x)$.

DEMOSTRACION.

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{2\pi} & \text{si } 0 < x \leqslant 2\pi \\ 80 & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\pi} & \text{si } 0 < x \leqslant 2\pi \\ 0 & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

[7] Tomemos dos pelotas al azar de una urna que contiene cinco pelotas numeradas 1,1,2,2,3. Sea X que representa la suma, Y el mayor de los dos números sacados. Hallar la distribución F, el promedio μ, la variancia σ^2 y la desviación estándar σ de

(a) X

(b) Y

(c) X + Y

DEMOSTRACION

(a) X (1,1,2,2,3)

El espacio muestral correspondiente es

$S = \{(1,1),(1,2),(1,2),(2,1),(2,1),(2,2),$
$(2,3),(3,2),(3,1),(1,3)\}$

Se tiene que $X : (a,b) \text{ ---- } a+b$

$X(1,1) = 1+1 = 2$

$X(1,2) = 1+2 = 3$

$X(1,2) = 1+2 = 3$

$X(2,1) = 2+1 = 3$

$X(2,1) = 2+1 = 3$

$X(2,2) = 2+2 = 4$

$X(2,3) = 2+3 = 5$

$X(3,2) = 3+2 = 5$

$X(3,1) = 3+1 = 4$

$X(1,3) = 1+3 = 4$

Distribución (F)

$X = x_i$	2	3	4	5
$f(x_i)$	1/10	4/10	3/10	2/10
$F(x_i)$	1/10	5/10	8/10	10/10

El valor esperado o promedio es

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \frac{2(1)+3(4)+4(3)+5(2)}{10} = \frac{36}{10} = 3.6$$

Variancia

$$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 f(x_i) - [E(X)]^2 =$$

$$= \frac{4(1)+9(4)+16(3)+25(2)}{10} - (3.6)^2 =$$

$$= \frac{138}{10} - 12.96 = 13.8 - 12.96 = 0.84$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{0.84} = 0.9$$

(b) Y : (a,b) ----- MAX (a,b)

Y(1,1) = MAX(1,1) = 1

Y(1,2) = MAX(1,2) = 2

Y(1,2) = MAX(1,2) = 2

Y(2,1) = MAX(2,1) = 2

Y(2,1) = MAX(2,1) = 2

Y(2,2) = MAX(2,2) = 2

Y(2,3) = MAX(2,3) = 3

Y(3,2) = MAX(3,2) = 3

Y(3,1) = MAX(3,1) = 3

Y(1,3) = MAX(1,3) = 3

Distribución (F)

$Y = y_i$	1	2	3
$f(y_i)$	1/10	5/10	4/10
$F(y_i)$	1/10	6/10	10/10

Valor esperado o promedio.

$$E(Y) = \mu = \Sigma\, y_i f(y_i) = \frac{1(1)+2(5)+3(4)}{10} = \frac{23}{10} = 2.3$$

Variancia

$$\sigma^2 = \frac{1(1)+4(5)+9(4)}{10} - (2.3)^2 = 5.7 - 5.29 =$$

$$= 0.41$$

Desviación estándar

$$\sigma = \sqrt{0.41} = 0.64$$

(c) $Z = X + Y$

$X : (a,b)$ ---- $a+b$ $\quad Y : (a,b)$ ---- $MAX(a,b)$

$(X+Y)(1,1) = X(1,1) + Y(1,1) = 2 + 1 = 3$

$(X+Y)(1,2) = X(1,2) + Y(1,2) = 3 + 2 = 5$

$(X+Y)(1,2) = X(1,2) + Y(1,2) = 3 + 2 = 5$

$(X+Y)(2,1) = X(2,1) + Y(2,1) = 3 + 2 = 5$

$(X+Y)(2,1) = X(2,1) + Y(2,1) = 3 + 2 = 5$

$(X+Y)(2,2) = X(2,2) + Y(2,2) = 4 + 2 = 6$

$(X+Y)(2,3) = X(2,3) + Y(2,3) = 5 + 3 = 8$

$(X+Y)(3,2) = X(3,2) + Y(3,2) = 5 + 3 = 8$

$(X+Y)(3,1) = X(3,1) + Y(3,1) = 4 + 3 = 7$

$(X+Y)(1,3) = X(1,3) + Y(1,3) = 4 + 3 = 7$

Distribución (F)

$Z = z_i$	3	5	6	7	8
$f(z_i)$	1/10	4/10	1/10	2/10	2/10
$F(z_i)$	1/10	5/10	6/10	8/10	10/10

VALOR ESPERADO O PROMEDIO.

$$E(Z) = \mu = \Sigma\, z_i f(z_i) = \frac{3(1)+5(4)+6(1)+7(2)+8(2)}{10} =$$

$$= \frac{59}{10} = 5.9$$

VARIANCIA

$$\sigma^2 = \frac{9(1)+25(4)+36(1)+49(2)+64(2)}{10} - (5.9)^2 =$$

$$= \frac{371}{10} - 34.81 = 37.1 - 34.81 = 2.3$$

DESVIACION ESTANDAR.

$$\sigma = \sqrt{2.3} = 1.5$$

[8] Una máquina impresora se emplea por la mañana para elaborar cierto libro y por la tarde realiza otro tipo de trabajo. Representemos por X/Y el número de ocasiones que falla en la mañana y en la tarde respectivamente. La tabla de la distribución de probabilidades conjunta de X/Y es

X/Y	0	1	2	g(y)
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
f(x)	0.2	0.4	0.4	

Hallar E(X) y E(Y)

DEMOSTRACION

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0.2	0.4	0.4

$E(X) = \Sigma\, x_i f(x_i) =$

$= 0(0.2)+1(0.4)+2(0.4)$

$= 0 + 0.4 + 0.8 =$

$= 1.2$

y_i	0	1	2
$f(y_i)$	0.5	0.2	0.3

$E(Y) = \Sigma\, y_i f(y_i) =$

$= 0(0.5)+1(0.2)+2(0.3)$

$= 0 + 0.2 + 0.6 =$

$= 0.8$

[9] Sea X una variable aleatoria continua con distribución

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

(a) Hallar k

(b) Hallar $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$

$P(X \leqslant 3)$

DEMOSTRACION.

$$\int f(x)\,dx = 1$$

(a) $$\int_0^5 kx\,dx = k\int_0^5 x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = k\left(\frac{25}{2} - 0\right) =$$

$$= k\left(\frac{25}{2}\right) = 1$$

en consecuencia

$$k = \frac{2}{25}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

$$\int_1^3 \frac{2}{25}x\,dx = \frac{2}{25}\int_1^3 x\,dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{25}(4) = \frac{8}{25}$$

$$\int_2^4 \frac{2}{25}\, x\, dx = \frac{2}{25}\int_2^4 x\, dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{2}{25}\,(8-2) =$$

$$= \frac{12}{25}$$

$$\int_0^3 \frac{2}{25}\, x\, dx = \frac{2}{25}\int_0^3 x\, dx = \frac{2}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{2}{25}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{25}$$

[10] Consideremos el experimento de lanzar una moneda. Hallar μ y σ^2.

DEMOSTRACION.

Consideremos la distribución de probabilidades del ejemplo [1] de está serie de problemas.

$$\mu = \Sigma\, x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Para determinar σ^2 podemos emplear una fórmula similar a la que se emplea para variables aleatorias continuas. Basta quitar el símbolo de integración y cambiar x por x_i.

$$\sigma^2 = \Sigma\, (x_i - \mu)^2\, f(x_i) = (x_1-\mu)^2 f(x_1) + (x_2-\mu)^2 f(x_2) =$$

$$= \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Se puede hacer lo mismo para los ejemplos

[2],[3],[4] y [5]. Las demostraciones se dejan al lector puesto que no son difíciles de realizar.

DISTRIBUCIONES ESPECIALES DE PROBABILIDAD PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

BERNOULLI

Para resolver una gran cantidad de problemas, pueden utilizarse algunas distribuciones especiales de la probabilidad. Las más importantes son las que describiremos ahora.

La distribución de Bernoulli se presenta frecuentemente en un número considerable de experimentos aleatorios. A lo largo de este libro de hecho hemos considerado problemas que caen dentro de esta distribución.

La distribución de Bernoulli es considerada la más sencilla debido a que presenta únicamente dos decisiones, es decir, un éxito o un fracaso. Un pequeño que esta por nacer puede ser hombre o mujer, si lanzamos una moneda al aire puede caer águila o sol, etc. Para tratar estos eventos cuantitativamente, hacemos corresponder el valor de 1 al éxito y el valor de 0 al fracaso.

Si p es la probabilidad de éxito de una variable aleatoria X, podemos determinar la probabilidad de fracaso, representada por q mediante $q = 1-p$.

Podemos ahora escribir un modelo probabilístico de Bernoulli.

x	f(x)
0	$q = 1-p$
1	p

MEDIA, VARIANCIA y DESVIACION ESTANDAR.

$$\mu = E(X) = \Sigma\, x_i f(x_i) = 0(1-p)+1(p) = p$$

$$\sigma^2 = V(X) = \Sigma\, x_i^2 f(x_i) - [E(X)]^2 = [0^2(1-p)+1^2 p] - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

En palabras : la media de una variable aleatoria de Bernoulli es igual a la probabilidad de un éxito. La variancia es igual a la probabilidad de un éxito multiplicada por la probabilidad de un fracaso.

DISTRIBUCION BINOMIAL

La palabra binomial significa que los resultados de una variable aleatoria se pueden agrupar en dos clases o categorías. Las categorías deben ser mutuamente excluyentes de manera que es claro a que clase pertenece una observación en particular y las clases deben ser exhaustivas por lo que no es posible obtener otro resultado.

Algunos ejemplos que podriamos clasificar como binomiales son : (a) Respuestas de un examen verdadero-falso, (b) Productos manufacturados clásificados como defectuosos o no defectuosos, etc. Esta distribución puede abarcar ejemplos donde intervienen variables continuas tales como (a) La velocidad de un automóvil dentro del límite correcto de velocidad o por encima de dicho límite, (b) Si una persona tiene una estatura mayor de 1.80 o no, etc.

La distribución binomial sirve para determinar la probabilidad de cierto número de resultados satisfactorios en un número dado de observaciones. Estás observaciones se consideran tomando en cuenta el proceso de Bernoulli. Para utilizar la distribución binomial en una forma más adecuada podemos considerar que (1) Existen n observaciones similares

(2) Cada observación tiene 2 posibles resultados, unó al cual le hemos llamado fracaso y el otro éxito.

(3) Las probabilidades de éxito p y de fracaso q, se mantienen constantes para todas las observaciones.

(4) Los resultados de las observaciones son independientes entre si.

Para obtener las probabilidades de una variable aleatoria discreta, que está distribuida binomialmente, se requiere el uso de tablas o utilizar la fórmula siguiente

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = {}_nC_x \, p^x q^{n-x}$$

donde

n = número de observaciones o de ensayos.

x = número de éxitos.

p = probabilidad de éxito en cada observación.

q = probabilidad de fracaso en cada observación.

MEDIA, VARIANCIA y DESVIACION ESTANDAR.

La media de una distribución binomial es el promedio o el valor esperado de una variable aleatoria binomial. La desviación estándar de una distribución binomial indica el grado en que los valores tenderan a variar a partir de la media de la distribución.

MEDIA $\mu = E(X) = np$

VARIANCIA $\sigma^2 = V(X) = npq$

DESVIACION ESTANDAR $\sigma = \sqrt{npq}$

DISTRIBUCION DE POISSON

Está distribución exponencial se utiliza para describir las probabilidades con respecto a un campo o intervalo continuo de tiempo o espacio. Algunas variables de este tipo que pueden ser representadas por una distribución de Poisson son (a) Los defectos por cm^2 (b) Accidentes por día, (c) Clientes por hora, (d) Llamadas telefónicas por minuto, etc.

Observar que la unidad de medición(por ejemplo, tiem-

po, área, etc) es continua, pero que la variable aleatoria, el número de acontecimientos es discreta. Por otra parte debemos notar que es imposible contar las fallas o fracasos (a) El número de defectos que no ocurrieron no se pueden contar (b) El número de accidentes que no ocurrieron no se pueden contar, etc.

Para usar una distribución de Poisson debemos considerar lo siguiente

1.- La probabilidad de un acontecimiento u ocurrencia es la misma a través de todo el campo de observación.

2.- La probabilidad de más de un acontecimiento en cualquier punto único es aproximadamente cero.

3.- El número de ocurrencias en cualquier intervalo es independiente del número de acontecimientos en otros intervalos.

La distribución de Poisson se puede describir totalmente por medio de un sólo parámetro, en este caso la media (La variancia de una distribución de Poisson es igual a la media, esto es $\sigma^2 = \mu$).

La distribución de Poisson se puede determinar por medio de tablas o por la siguiente fórmula

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

donde

x = número de ocurrencias.

e = base de los logaritmos naturales = 2.71828

λ = razón media por unidad.

t = número de unidades.

La cantidad λt = cantidad media de ocurrencias respecto al intervalo t. De está forma $\mu = \lambda t$

Sustituyendo

$$P(X) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

MEDIA, VARIANCIA y DESVIACION ESTANDAR.

Hemos visto que

MEDIA $\mu = \mu$

VARIANCIA $\sigma^2 = \mu$

DESVIACION ESTANDAR $\sigma = \sqrt{\mu}$

DISTRIBUCION GEOMETRICA

Para describir está distribución se debe considerar un experimento aleatorio de Bernoulli. Cuando en un experimento de esta naturaleza existen observaciones independientes y deseamos conocer la probabilidad de que hasta la observación X aparezca por primera ocasión el éxito, se crea la función de probabilidad conocida como geométrica. La fórmula que describe está distribución es

$$f(x) = q \cdot q \cdot q \cdot \cdots \cdot qp = q^{x-1}\, p$$

MEDIA, VARIANCIA y DESVIACION ESTANDAR.

MEDIA $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$

VARIANCIA $\sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}$

DESVIACION ESTANDAR $\sigma = \sqrt{q/p^2}$

Existen otras distribuciones que son variantes de la distribución binomial las cuales son: La distribución multinomial y la distribución hipergeométrica.

Por último daremos la función de distribución de probabilidad para la distribución geométrica. En la página anterior se dió la función de probabilidad de la distribución geométrica, la cual se considera para determinar la función de distribución la cual es

$$F(X) = p \sum_{x_i \leqslant x} q^{x_i - 1}$$

EJEMPLOS.

[1] Sea el experimento de lanzar una moneda. Aplicar la distribución de Bernoulli para describirlo.

DEMOSTRACION.

La probabilidad de obtener soles, lo que se puede llamar un éxito es $\frac{1}{2} = 0.5$ y la de obte-