ner águilas, que se puede llamar un fracaso, es de $\frac{1}{2} = 0.5$ Si consideramos al contrario no hay problema puesto que ambos eventos son complementos.

$\mu = p = 0.5$

$\sigma^2 = (0.5)(0.5) = 0.25$

$\sigma = \sqrt{0.25} = 0.50$

[2] Supóngase que el 80 % de las familias de una ciudad son propietarios de sus hogares. Sea X la variable aleatoria que toma el valor de 1 cuando una familia elegida al azar en la ciudad es propietaria y 0 cuando no lo es. Hallar la media y la variancia de X.

DEMOSTRACIÓN

$p = 0.80 \qquad q = 1-p = 1 - 0.80 = 0.20$

$\mu = p = 0.80$

$\sigma^2 = (0.80)(0.20) = 0.16$

[3] En un sanatorio se dice que cierta vacuna contra el resfriado es 70 % eficaz, esto es, que de 100 personas que reciben la vacuna, 70 pasarán el invierno sin resfriado. Sea X la variable aleatoria de Bernoulli en este ejemplo. Hallar la media y la variancia de X.

DEMOSTRACION.

$p = 0.70 \qquad q = 0.30$

$$\mu = p = 0.70$$

$$\sigma^2 = pq = (0.30)(0.70) = 0.21$$

[4] Hallar $B(2;7,\frac{1}{2})$

DEMOSTRACION.

$$B(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

x = número de éxitos esperados = 2

n = número de pruebas repetidas = 7

p = probabilidad de éxito = $\frac{1}{2}$

q = 1-p probabilidad de fracaso = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Sustituyendo

$$B(2;7,\frac{1}{2}) = \binom{7}{2} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^5 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} (\frac{1}{4})(\frac{1}{32}) =$$

$$= \frac{21}{128}$$

[5] Determinar la probabilidad de obtener exactamente dos soles en seis lanzamientos de una moneda.

DEMOSTRACION.

$p = q = \frac{1}{2}$

$n = 6$

$x = 2$

$$P(x) = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^4 =$$

$$= \frac{30}{2} \; \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

[6] La probabilidad de que un estudiante conteste

un examen es .4. Supongamos que el examen tiene que ser contestado por dos estudiantes cuyas decisiones de contestar son independientes. Por medio de la fórmula para la distribución binomial, construir la distribución de probabilidad del número de personas que estarán dispuestas a contestar el examen.

DEMOSTRACION.

$p = .4 \qquad q = 1-p = 1-.4 = .6$

$n = 2 \quad x = 0,1,2$

x		P(x)
0	$P(0) = \binom{2}{0}(.4)^0(.6)^{2-0} = (.6)^2$	$= .36$
1	$P(1) = \binom{2}{1}(.4)^1(.6)^{2-1} = 2(.4)(.6)$	$= .48$
2	$P(2) = \binom{2}{2}(.4)^2(.6)^{2-2} = (.4)^2$	$= .16$
		1.00

La probabilidad de que nadie conteste es .36

La probabilidad de que uno conteste es .48

La probabilidad de que dos contesten es .16

[7] La probabilidad de que un egresado obtenga su grado de estudios en una escuela superior es 0.4. Determinar la probabilidad considerando a otros cinco egresados más que acaban de terminar su ciclo de estudios (a) Ninguno obtenga el grado, (b) Uno si obtenga el grado, (c) Al menos uno obtenga el grado.

DEMOSTRACION.

(a) P(ninguno se gradúe) = ${}_5C_0(0.4)^0(0.6)^5 = 0.08$

(b) P(1 se gradúe) = ${}_5C_1(0.4)^1(0.6)^4 = 0.26$

(c) P(al menos uno se gradúe) = 1-P(ninguno) =

$= 1 - 0.08 = 0.92$

[8] El equipo de fut-bol Atlas tiene $\frac{2}{5}$ de probabilidad de ganar cuando juega. Si realiza cuatro partidos, hallar la probabilidad de que el equipo Atlas (A) gane, (a) 2 Partidos, (b) Por lo menos un partido, (c) Más de la mitad de los partidos.

DEMOSTRACION.

(a) Gane dos partidos

$$P(2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{432}{1250} = \frac{216}{625}$$

(b) Gane por lo menos un partido.

$q^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$ Probabilidad de que pierda todos los partidos.

La probabilidad de fracaso es $1 - q^4$, esto es

$$1 - q^4 = \frac{625}{625} - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}$$

(c) P(de 3 victorias) + P(4 victorias)

$$B(3;4,\tfrac{2}{5})+B(4;4,\tfrac{2}{5}) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4 =$$

$$\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}\,\frac{8}{125}\,\frac{3}{5}+\frac{24}{24}\,\frac{16}{625}=\frac{96}{625}+\frac{16}{625}=\frac{112}{625}$$

[9] Sea x el número de soles obtenidos en seis lanzamientos de una moneda. Hallar la media y la desviación estándar de x.

DEMOSTRACION.

$n = 6 \qquad p = 0.5 \qquad q = 0.5$

$\mu = np = 6(0.5) = 3$

$\sigma^2 = npq = (6)(0.5)(0.5) = 1.5$

$\sigma = \sqrt{1.5} = 1.22$

[10] Si la probabilidad de un remache defectuoso es 0.1 hallar, (a) La media, (b) La desviación estándar para la distribución de remaches defectuosos de un total de 400.

DEMOSTRACION.

(a) $\mu = np = 400(0.1) = 40$ Se espera tener 40 remaches defectuosos.

(b) $\sigma^2 = npq = 400(0.1)(0.9) = 36$

(c) $\sigma = \sqrt{36} = 6$

[11] En la distribución de Poisson $p(x;\mu)$ hallar $p(3;1)$.

DEMOSTRACION

$$p(x,\mu) = p(3;1) = \frac{1^3 e^{-1}}{3!} = \frac{e^{-1}}{6} = \frac{0.368}{6} = .0613$$

[12] Mediante un proceso mecánico se producen alfombras de fina calidad que presentan tan sólo un promedio de dos defectos por metro. Determinar la probabilidad de que en un metro cuadrado tenga exactamente un defecto, suponiendo que el proceso puede ser aproximado mediante una distribución de Poisson.

DEMOSTRACION.

$\mu = 2$

$e^{-2} = 0.135$ (Tablas)

$$p(x=1) = \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} = \frac{0.135(2)}{1} = 0.270$$

[13] Supongamos que en el puerto de Acapulco arriban a razón de $\lambda = 2$ barcos/hora y que está proporción esta aproximada mediante la distribución de Poisson. Si se observa este proceso durante un período de media hora ($t = \frac{1}{2}$) encuentre la probabilidad de que, (a) No arribe ningún barco, (b) Arriben tres barcos.

DEMOSTRACION.

Primero determinamos el valor de la media.

$$\mu = \lambda t = 2(\tfrac{1}{2}) = 1$$

$e^{-1} = 0.368$ (Tablas)

(a) $p(x = 0) = \dfrac{e^{-1}(1)^0}{0!} = 0.368$

(b) $p(x = 3) = \dfrac{e^{-1}(1)^3}{3!} = \dfrac{0.368}{6} = 0.061$

[14] Obtener la probabilidad de encontrar 4 artículos defectuosos de una muestra de 300 tomada de un enorme lote, en el que se dice que hay un 2% de artículos defectuosos.

DEMOSTRACION.

Notar que si empleamos la distribución binomial se tendrían dificultades puesto que el desarrollo de

$$P(x = 4) = \binom{300}{4}(0.02)^4(0.98)^{296}$$

es complicado.

Podemos determinar $p(x = 4)$ mediante la distribución de Poisson con $\mu = np$. Así

$$\mu = np = 300(0.02) = 6$$

$$P(x = 4) = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} = 0.135$$

En resumen : Cuando n sea grande y p está cerca de 0 o 1.00 es adecuado utilizar está aproximación, puesto que la exactitud obtenida de está manera varía muy poco de la obtenida por la distribución binomial y además evitamos realizar demasiadas operaciones. Veamos a continuación otro ejemplo relacionado a esto.

[15] Supóngase que en una población de 50,000 habitantes existe un promedio anual de 2 suicidas. Para una población de 100,000 hallar la probabilidad de que en un año dado exista,

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 2 ó más suicidas.

DEMOSTRACION.

$n = 100,000$

$$p = \frac{2}{50000} = .00004$$

$$\mu = np = (100,000)(.00004) = 4$$

(a) $$p(x = 0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = \frac{.0183}{1} = .0183$$

(b) $$p(x = 1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = \frac{(4)(.0183)}{1} = .0732$$

(c) $$p(x = 2) = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = \frac{(16)(.0183)}{2} = .1464$$

(d) $$p(x \geqslant 2) = 1 - [p(0)+p(1)] = 1-[.0183+.0732] =$$

$$= 1 - .0915 = 0.909$$

[16] En una zona de Veracruz, la probabilidad de que una tormenta fuerte ocurra en un día cualquiera durante el invierno entre enero y febrero es igual a 0.1 Considerando que un día es independiente de cualquier otro ¿Cuál es la probabilidad de que la primera tormenta

ocurra el 3 de febrero?.

DEMOSTRACION.

Consideremos que el mes de enero cuenta con 31 días. Por consiguiente si x es el número de días empezando del 1° de enero al 3 de febrero se tiene que $x = 34$

En consecuencia

$$f(x) = q^{x-1}\, p = (0.9)^{33}(0.1) = 0.003$$

[17] En un entrenamiento de basquet-bol, un jugador se dispone a ejecutar unos tiros libres hasta anotar una canasta. Supongamos que los tiros son independientes y que su probabilidad constante de anotar cada canasta es de 0.8 y considerando que X = número de tiros que efectúa hasta anotar una canasta. Determinar

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que necesite a lo más 4 tiros para anotar una canasta?.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que necesite al menos 5 tiros para anotar?.

(c) En general ¿Cuál es el número de tiros que debemos esperar para que anote?.

(d) ¿Qué tan dispersos están los valores alrededor de la media?.

DEMOSTRACION

$p = 0.80 \qquad q = 0.20$

(a) $P[\, x \leqslant 4\,] = F(x = 4) = 0.8\,[q^{1-1}+q^{2-1}+q^{3-1}+q^{4-1}]$

variable aleatoria se pueden describir mediante la distribución uniforme. En una gráfica, la distribución uniforme se representa como un rectángulo limitado por los puntos a y b, los cuales constituyen el intervalo de resultados posibles. Por lo tanto, las características importantes de esta distribución es que se mantiene constante en el intervalo [a,b] y cero fuera de él.

Una definición más formal es

DEFINICION. Si X es una variable aleatoria continua que toma todos los valores en el intervalo cerrado [a,b] , en donde a y b son finitos. Si la función de densidad de probabilidad de X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{fuera de } [a,b] \end{cases}$$

decimos que X está distribuida uniformemente en el intervalo [a,b]

Para cualquier intervalo [c,d] en donde $a \leqslant c < d \leqslant b$, $P(c \leqslant X \leqslant d)$ es la misma para todos los sub-intervalos que tienen la misma longitud. Matemáticamente tenemos

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

La función de la distribución acumulativa F(x), para

una variable aleatoria X uniformemente distribuida se puede representar como

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x < b \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

MEDIA Y VARIANCIA.

La media o valor esperado y la variancia de una variable aleatoria uniformemente distribuida están dadas por las siguientes fórmulas

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DISTRIBUCION EXPONENCIAL

Esta distribución trata probabilidades acerca de la medida de tiempo o distancia entre ocurrencias con respecto a un intervalo continuo. Algunos ejemplos de esta distribución son, (a) Se emplea para representar el tiempo entre fallas de un sistema eléctrico, (b) El tiempo entre llegadas de clientes a un supermercado, etc.

Si es muy pequeña la probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo corto y si la ocurrencia de tal evento es, estadísticamente independiente respecto a la ocurrencia de otros eventos, entonces el

intervalo de tiempo entre ocurrencias de eventos de este tipo estará distribuido en forma exponencial.

La definición formal es

DEFINICION. Se dice que una variable aleatoria continua X que toma todos los valores positivos tiene una distribución exponencial con parámetro α positivo si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa de X es

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

MEDIA Y VARIANCIA.

La media o valor esperado y la variancia de X están dadas por las siguientes fórmulas

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

$$\sigma^2 = V(X) = [E(X)]^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

Como la distribución exponencial tiene sólo un parámetro α, es posible expresarlo como

$$\alpha = \frac{1}{E(X)}$$

DISTRIBUCION NORMAL

Las distribuciones normales ocupan un lugar muy importante en la estadística teórica como en la aplicada. Lo más sobresaliente de una distribución de este tipo es que las distribuciones de medias muestrales y proporciones de grandes muestras tienden a distribuirse normalmente, lo que tiene repercusiones importantes en el muestreo.

La gráfica de una distribución normal se asemeja mucho a una campana. Por ello es posible aproximar a este tipo de distribuciones una distribución matemática continua conocida como distribución de Gauss.

Una característica muy importante es que una distribución normal es posible especificarla de manera amplia por medio de dos parámetros : la media y la desviación estándar. Otra cosa interesante es que la probabilidad de que una variable aleatoria tenga un valor entre dos puntos cualesquiera es igual al área bajo la curva normal entre esos dos puntos.

Entonces es posible deducir que si una curva normal se puede especificar completamente por su media y su desviación estándar, es que el área bajo la curva entre cualquier punto y la media es una función sólo del número de desviaciones estándar que el punto dista de la media. Esta es la clave para calcular probabilidades para la curva normal.

Ahora enlistaremos todas las propiedades importantes que poseen las curvas normales.

(a) Una curva normal tiene forma de campana.

(b) Esta curva es simétrica con respecto a la media de la distribución.

(c) Se extiende de $-\infty$ a $+\infty$

(d) Cada distribución normal está completamente especificada por su media y su desviación estándar; existe una distribución normal diferente para cada combinación de media y desviación estándar.

(e) El área total bajo la curva normal es 100 % o 1.00

(f) El área bajo la curva entre dos puntos es la probabilidad de que una variable distribuida normalmente tome un valor entre ellos.

(g) Dado que existe un número ilimitado de valores en el intervalo que va de menos infinito a mas infinito, la probabilidad de que una variable aleatoria distribuida con normalidad sea exactamente a cualquier valor dado es casi de cero. En consecuencia, las probabilidades siempre serán para un intervalo de valores.

(h) El área bajo la curva entre la media y cualquier otro punto es una función del número de desviaciones estándar que el punto dista de la media. La definición formal es

DEFINICION. La variable aleatoria X, que asume todos los valores reales, tiene una distribución normal si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (*)$$

donde μ = media, σ = desviación estándar, $\pi = 3.1415$
$e = 2.7182$

La función de distribución acumulativa de X es

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

MEDIA, VARIANCIA y DESVIACION ESTANDAR.

Para determinar estas cantidades hay que realizar algunos desarrollos matemáticos un tanto laboriosos. Para nuestras necesidades basta considerar únicamente los resultados

MEDIA $E(X) = \mu$

VARIANCIA $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

De la ecuación anterior se tiene que

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Ahora si

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

entonces

$$\sigma^2 = V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

El problema de trabajar con un grupo ilimitado de distribuciones normales se puede evitar totalmente, si es posible manejar valores relativos en lugar de valores reales. Esto equivale a utilizar la media como punto de referencia y la desviación estándar como una medida de la desviación de dicho punto de referencia. Esta nueva escala recibe el nombre de escala Z.

La distribución especial que representa todas las variables aleatorias normales se conoce como distribución normal estándar. Es la distribución de otra variable normal llamada variable Z y se define como

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

en donde

Z = número de desviaciones estándar a partir de la media.

x = algunos valores de interés.

μ = media de una distribución normal.

σ = desviación estándar.

La distribución normal estándar tiene media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$

Cuando la variable aleatoria X se expresa en unidades de desviación, esto es, en unidades de Z, la ecuación f(x) marcada por (*) se reduce

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} Z^2}$$

En este caso se dice que Z se distribuye normalmente con media cero y variancia 1

RELACION ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

Si n es grande y ni la probabilidad de éxito p y ni la probabilidad de fracaso q están muy próximas a cero, la distribución binomial puede aproximarse a la distribución normal con variable estandarizada dada por

$$Z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

OBSERVACION IMPORTANTE.

Antes de iniciar la serie de ejemplos es importante aclarar la siguiente situación.

El análisis de variables aleatorias continuas tiende a concentrarse en la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor dentro de algún intervalo y por lo tanto no es necesario distinguir entre $a < x < b$ y $a \leqslant x \leqslant b$, como sucede en el caso de las probabilidades de una variable aleatoria discreta. Lo anterior es importante debido a que algunos libros tratan las distribuciones continuas empleando un intervalo cerrado y otros un intervalo abierto. Por consiguiente, en el caso de una variable aleatoria continua, se determina la probabilidad al obtener el porcentaje del área entre dos valores.

La función de distribución estándar se detalla adelante.

EJEMPLOS.

[1] Si consideramos un punto al azar dentro del intervalo [0,2] ¿Cuál es la probabilidad de que el punto elegido quede entre 1 y 1.5?.

DEMOSTRACION.

$a = 0 \quad b = 2 \quad b-a = 2-0 = 2$

$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

$f(x) = 0 \quad$ en cualquier otra parte.

$$P(1 \leqslant x \leqslant 1.5) = \int_1^{1.5} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^{1.5} dx = \frac{1}{2}\, x \Big|_1^{1.5}$$

$$= \frac{1}{2}\,(1.5-1) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

[2] Si consideramos que X tiene una distribución uniforme en el intervalo [-1,1] determinar la función de densidad de probabilidad f(x) y la probabilidad de las $X \geqslant 0$ y de $0 \leqslant X \leqslant 0.3$

DEMOSTRACION.

$a = -1 \quad b = 1 \quad b-a = 1-(-1) = 2$

$f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

$f(x) = 0$ en cualquier otra parte.

$$P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = \frac{1}{2}\, x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,(1) = \frac{1}{2}$$

$$P(0 \leqslant x \leqslant 0.3) = \frac{1}{2}\int_0^{0.3} dx = \frac{1}{2}\, x\Big|_0^{0.3} = \frac{0.3}{2} = 0.15$$

[3] Se puede suponer que la dureza T de una muestra de acero es una variable aleatoria continua distribuída uniformemente sobre el intervalo [50,70] de una escala A. Determinar la función de densidad de probabilidad y la probabilidad en el intervalo [60,65]

DEMOSTRACION.

$a = 50 \qquad b = 70 \qquad b-a = 70-50 = 20$

$f(x) = \frac{1}{20} \qquad \text{si} \quad 50 \leqslant x \leqslant 70$

$f(x) = 0 \qquad \text{en cualquier otra parte}$

$$P(60 \leqslant x \leqslant 65) = \frac{1}{20}\int_{60}^{65} dx = \frac{x}{20}\Big|_{60}^{65} = \frac{65}{20} - \frac{60}{20} =$$

$$= \frac{5}{20} = 0.25$$

[4] Se informa que en Monterrey en un día de invierno la temperatura más alta diaria varía entre 0^0C y 6^0C según datos proporcionados por un centro de meteorología. (a) Si el meteréologo quiere minimizar el error en la predicción ¿qué temperatura deberá predecir?, (b) ¿Cuál es la probabilidad de que en cualquier día de invierno la temperatura no exceda del 1^0C?

DEMOSTRACION.

$a = 0 \qquad b = 6 \qquad b-a = 6-0 = 6$

$f(x) = \frac{1}{6} \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 6$

$f(x) = 0 \qquad \text{en cualquier otra parte.}$

(a) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{6+0}{2} = 3$

(b) $P(0 \leqslant x \leqslant 6) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 dx = \frac{1}{6}\,x \Big|_0^1 =$

$$= \frac{1}{6}\,(1) = \frac{1}{6}$$

[5] Sea X la variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo $[0,2\pi]$. Hallar (a) La función de densidad de probabilidad $f(x)$, (b) La función de distribución $F(x)$, (c) Media (d) Variancia, (e) La probabilidad de $P[X \geqslant \frac{3\pi}{2}]$ $P[X \leqslant \frac{3\pi}{2}]$, $P[X = \frac{3\pi}{2}]$, $P[\pi \leqslant X \leqslant \frac{3\pi}{2}]$

DEMOSTRACION.

$a = 0 \qquad b = 2\pi \qquad b-a = 2\pi - 0 = 2\pi$

(a)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

$$f(x) = 0 \quad \text{en cualquier otra parte}$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2\pi} & \text{si } 0 \leqslant x < 2\pi \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2\pi \end{cases}$$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2\pi}{2} = \pi$

(d) $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2\pi)^2}{12} = \frac{4\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3}$

(e) $P[X \geqslant \frac{3\pi}{2}] = 1 - P[X \leqslant \frac{3\pi}{2}] = 1 - F(\frac{3\pi}{2}) =$

$$= 1 - \frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} = 1 - \frac{3\pi}{4\pi} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\,\%$$

$$P[X \leqslant \frac{3\pi}{2}] = F(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\,\%$$

$$P[X = \frac{3\pi}{2}] = f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2\pi} = 0.159 = 15.9\,\%$$

$$P[\pi \leqslant X \leqslant \frac{3\pi}{2}] = F(\frac{3\pi}{2}) - F(\pi) = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{2\pi} =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\,\%$$

Si variamos los símbolos en las otras 3 formas posibles en este último resultado se tendrá siempre 25 %

[6] Supongamos que el tiempo que tardan en recibir su orden después de hacerla en el restaurante "Alameda" promedia 10 minutos. Supongamos también que ese tiempo que espera en ser atendido se distribuye exponencialmente.

(a) Calcule la probabilidad de que su tiempo de

espera sea mayor de 10 minutos.

(b) Obtenga la probabilidad de que su tiempo de espera sea de 10 minutos o menos.

(c) Encontrar la probabilidad de que su tiempo de espera sea de tres minutos o menos.

DEMOSTRACION.

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \qquad \alpha = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ por min.}$$

(a) $P(X > 10) = \alpha e^{-\alpha x} = 0.1e^{-0.1(10)} = 0.1e^{-1} =$

$= 0.0368$

(b) $P(X \leqslant 10) = 1-e^{-\alpha x} = 1-e^{-1} = 1-.368 = 0.632$

(c) $P(X \leqslant 3) = 1-e^{-0.1(3)} = 1-e^{-0.3} = 1-.741 = .259$

[7] Supongamos que un autómovil falla un promedio de una vez cada dos años. Encuentre la probabilidad de que el automóvil no falle durante el siguiente año.

DEMOSTRACION

$\frac{1}{\alpha} = 2$ en consecuencia $\alpha = \frac{1}{2} = 0.5$

$P(X > 1) = 0.5e^{-0.5(1)} = 0.5e^{-0.5} = (0.5)(.607)$

$= .3035$

[8] Se ha observado que las fallas mecánicas que suceden en una refineria aparecen como un pro-

ceso de Poisson aproximado con parámetro $\alpha = \frac{1}{2}$ hora (1 cada dos horas). Si se llega a la refineria a las 9 horas del lunes y se representa a X como "El tiempo que transcurre desde la llegada hasta que ocurre la primera falla".

Determinar

(a) La función de densidad de probabilidad f(x)

(b) La probabilidad de que no pasen más de 4 horas antes de que aparezca la primera falla.

(c) La probabilidad de que transcurra al menos una hora antes de que ocurra la primera falla.

(d) La probabilidad de que el tiempo para la siguiente falla, sea mayor que el promedio.

DEMOSTRACION.

(a) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$ si $x > 0$

$f(x) = 0$ para cualquier otro valor.

(b) $P[X < 4] = P[0 \leqslant X \leqslant 4] = F(4) = 1 - e^{-\frac{1}{2}4}$

$= 1 - e^{-2} = .8647 = 86.47\%$

(c) $P[X \geqslant 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - F(1) =$

$= 1-(1-e^{-\frac{1}{2}(1)}) = e^{-\frac{1}{2}} = .6065 =$

$= 60.65\%$

(d) $P[X > \mu] = P[X > \frac{1}{\alpha}] = P[X > \frac{1}{\frac{1}{2}}] = P[X > 2] =$

$= 1 - P[X \leqslant 2] = 1 - F(2) = 1 - [1 - e^{-\frac{1}{2}(2)}] =$

$= 1 - 1 + e^{-1} = .3680 = 36.80\%$

[9] Supongamos que X es una variable aleatoria con distribución normal estándar. Determinar $P(-0.81 \leqslant X \leqslant 1.13)$

DEMOSTRACION

$P(-0.81 \leqslant X \leqslant 0) + P(0 \leqslant X \leqslant 1.13) =$

$= .2910 + .3708 = .6618$

Para obtener los valores anteriores se utilizaron tablas.

[10] Supongamos que X es una variable aleatoria con distribución normal estándar. Determinar $P(0.53 \leqslant X \leqslant 2.03)$

DEMOSTRACION

$P(0 \leqslant X \leqslant 2.03) - P(0 \leqslant X \leqslant 0.53) =$

$= .4788 - .2019 = 0.2769$

[11] Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Determinar $P(|X| \leqslant \frac{1}{4})$.

DEMOSTRACION

$$P(|X| \leqslant .25) = P(-.25 \leqslant X \leqslant .25) =$$

$$= 2P(0 \leqslant X \leqslant .25) = 2(.0987) = .1974$$

[12] En un examen final de Administración Industrial la media fue 72 y la desviación estándar fue 15. Determinar las referencias estandarizadas (esto es, graduaciones en unidades de desviación estándar) de los estudiantes que obtuvieron puntuaciones de (a) 93 (b) 60 (c) 72

DEMOSTRACION.

(a) $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{93-72}{15} = 1.4$

(b) $Z = \frac{60-72}{15} = -0.8$

(c) $Z = \frac{72-72}{15} = 0$

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR.

La función de distribución normal F(x) se puede estandarizar sustituyendo el valor de Z. Recuerde que esto se hizo para la función de densidad de probabilidad f(x). Cuando necesitemos en los ejemplos la función de distribución normal estándar la representaremos por $\Phi(Z)$. Está función se define como

$$\Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{array}$$

Debido a que no es fácil calcular esta integral, los