CONJUNTOS FINITOS.

Son aquellos que nos permiten contar todos sus elementos.

CONJUNTOS INFINITOS.

Son aquellos que no nos permiten contar todos sus elementos.

OPERACIONES CON CONJUNTOS.

Las operaciones entre conjuntos crean nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados.

UNION $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ó } x \in B\}$

INTERSECCION $A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$

COMPLEMENTO $A^c = \{x | x \notin A\}$

DIFERENCIA $A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$

DIFERENCIA SIMETRICA $(A-B) \cup (B-A)$

PRODUCTO CARTESIANO. $A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS.

CONMUTATIVAS

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A - B \neq B - A$

ASOCIATIVAS

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

DISTRIBUTIVAS $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

LEYES DE MORGAN $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

El complemento de la unión de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de los complementos.
El complemento de la intersección de dos conjuntos A y B es igual a la unión de los complementos.

OTRAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS.

$U^c = \phi$	$\phi^c = U$
$U \cup \phi = U$	$U \cap \phi = \phi$
$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$
$A \cup A^c = U$	$A \cap A^c = \phi$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

Ahora veremos algunos conceptos de probabilidad para que posteriormente veamos la relación que existe entre ella y la teoría de los conjuntos.
La *PROBABILIDAD* interviene en los juegos de azar, casinos, deportes organizados, demanda que tendra un producto nuevo, eficacia de un suero, estimar el costo de producción, presupuestar, etc.
El empleo de probabilidades indica que existe algún elemento aleatorio relativo a la ocurrencia o no

ocurrencia de algún acontecimiento futuro. En muchas ocasiones nos será difícil predecir que pasará, pero será posible establecer lo que podría pasar.

Al igual que en Estadística Descriptiva, en Probabilidad se requiere del uso de *MODELOS MATEMATICOS* para representar el comportamiento de ciertos fenómenos.

Existen dos tipos de fenómenos importantes los cuales son:

((1)) *FENOMENOS DETERMINISTICOS*. Su característica principal es que al llevarlos a cabo bajo ciertas condiciones invariables, siempre determinan un mismo resultado.

((2)) *FENOMENOS ALEATORIOS*. Este tipo de fenómenos son los que se consideran en probabilidad. La diferencia entre estos fenómenos y los otros es de que en idénticas condiciones de ejecutarlos, no siempre se obtiene un mismo resultado y por otra parte, no se puede determinar con certeza cuál será el resultado particular en un experimento dado, pero sí describir todos los resultados posibles.

Cuando un experimento se repite constantemente, se puede elaborar un modelo de *REGULARIDAD ESTADISTICA*. Para evitar confusiones aclaramos al lector que en lugar de emplear las palabras fenómenos aleatorios utilizaremos mejor las palabras experimentos aleatorios o simplemente experimentos.

ESPACIO MUESTRAL (S)

Un espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Estos resultados posibles también son conocidos como *PUNTOS MUESTRALES*. Bajo estas consideraciones diremos que un *EVENTO* es un conjunto de puntos muestrales y recíprocamente, cualquier subconjunto del espacio muestral es considerado como un evento.

Los eventos se clasifican en dos:

EVENTO ELEMENTAL o SIMPLE. Es aquél conjunto formado por un único resultado.

EVENTO COMPUESTO. Es aquél conjunto formado por dos o más posibles resultados.

Si un espacio muestral tiene un número finito de puntos muestrales se le conoce como *ESPACIO MUESTRAL FINITO NUMERABLE;* si tiene tantos puntos muestrales como números naturales, se le conoce como *ESPACIO MUESTRAL INFINITO NUMERABLE;* si tiene tantos puntos muestrales como hay en algún intervalo en el eje X, se le conoce como *ESPACIO MUESTRAL INFINITO NO NUMERABLE*. Posteriormente veremos que esto está ligado con los conceptos de la función de probabilidad y los de las variables aleatorias.

ALGEBRA DE EVENTOS.

En probabilidad se debe tener en cuenta cómo se relacionan entre sí diversos eventos. Es aquí donde

haremos uso de la teoría de los conjuntos puesto que existe una correspondencia entre los eventos y los conjuntos.

El *COMPLEMENTO* de un evento consta de todos los resultados del espacio muestral que no forman parte de él. En otras palabras, si A es un evento relacionado con un experimento aleatorio, podemos pensar en la no ocurrencia de A. Si consideramos un espacio muestral, el evento complemento representado por A^c está formado por los eventos elementales que no pertenecen a A. Por ejemplo en una baraja de 52 cartas, el complemento de "el naipe es un corazón", es el conjunto de todas las cartas que no son corazones (es decir, tréboles, diamantes y espadas). Otro caso sería si A es el evento de que aparece un número par de puntos en el lanzamiento de un dado es decir, $A = \{2,4,6\}$ entonces el evento complemento A^c debe ser $A^c = \{1,3,5\}$ es decir, aparece un número impar de puntos. En teoría de conjuntos se tendría que

$$A \cup A^c = S$$

Ahora si tenemos dos eventos A y B relacionados con un experimento y deseamos saber que sucede cuando al menos uno de los dos eventos ocurre. Por medio de operaciones entre conjuntos, podemos representar lo anterior como $A \cup B$ es decir, ocurre A u ocurre B ó ambos. Considerando un espacio muestral, $A \cup B$ estará formado por los eventos elementales que pertenecen a A o B ó a ambos.

Ejemplo. Consideremos el lanzamiento de dos dados al mismo tiempo y observemos los puntos que aparecen en la parte superior. Sean los eventos:

A : Aparecen 3 puntos en el dado número 1

B : Aparecen 3 puntos en el dado número 2

Por lo tanto $A \cup B$ es el evento en el que aparece al menos un tres en el lanzamiento.

En notación de conjuntos se tiene:

$A = \{ (31),(32),(33),(34),(35),(36) \}$

$B = \{ (13),(23),(33),(43),(53),(63) \}$

$A \cup B = \{ (31),(32),(33),(34),(35),(36),(13),(23),$
$(43),(53),(63) \}$

Ahora podemos relacionar otra operación de la teoría de conjuntos, si nos preguntamos que sucede si los eventos A y B ocurren simultáneamente. Esto se representa como $A \cap B$ y está formado de todos los eventos elementales que pertenecen a ambos A y B. Para el ejemplo anterior, se tendría $A \cap B = \{(33)\}$ esto es, aparecen tres puntos en ambos dados.

Los eventos son *MUTUAMENTE EXCLUYENTES O EXCLUSIVOS* si no presentan elementos en común o si no pueden ocurrir al mismo tiempo. Este evento se le conoce como *EVENTO IMPOSIBLE o VACIO* y se representa por ϕ

Como ejemplo podríamos citar el siguiente: Al sacar una sola carta, los eventos "El naipe es un trébol" y "El naipe es un diamante" son mutuamente excluyentes ya que una carta no puede ser trébol y diamante a la vez.

Es importante observar que un evento A y su complemento A^c son mutuamente excluyentes, es decir, si hacemos la intersección de A con su complemento A^c tendremos como resultado el evento imposible ϕ por no tener elementos en común. Esto se representa como

$$A \cap A^c = \phi$$

Se dice que los eventos son *EXHAUSTIVOS* si por lo menos uno de ellos debe ocurrir durante un experimento. Así si "la carta es un corazón" , "la carta es una espada" , "la carta es un trébol" , "la carta es un diamante" son exhaustivos puesto que agotan todas las posibilidades. Otro ejemplo sería "la carta es roja" y "la carta es negra". En relación con un evento y su complemento se tendría que $A \cup A^c = S$

DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDAD O DE LAPLACE.

Esta definición es para las situaciones que tienen resultados *IGUALMENTE PROBABLES*. El espacio muestral de estos experimentos está formado por un número finito de eventos elementales.

Algunos experimentos que tienen características de tener resultados igualmente probables son los juegos de azar tales como tiro de monedas, tiro de dados, cartas, etc.

Cuando los resultados son de esta forma, la probabilidad de cada resultado es simplemente una función

del número de resultados posibles

$$P(A) = P(\text{Cada resultado}) = \frac{1}{\text{NUMERO DE RESULTADOS POSIBLES.}}$$

Si se tiene una baraja de 52 cartas, la probabilidad de sacar cualquier carta es $P(A) = \frac{1}{52}$. La probabilidad en un dado para obtener un determinado valor es $P(A) = P(\text{una cara cualquiera}) = \frac{1}{6}$.

La definición clásica se puede emplear a eventos que comprendan dos o más resultados. Si un espacio muestral S consta de n eventos elementales "igualmente probables" y A es un evento formado por m de estos eventos elementales se tiene que

$$P(A) = \frac{\text{NUMERO DE RESULTADOS FAVORABLES DE A}}{\text{NUMERO TOTAL DE RESULTADOS FAVORABLES}} = \frac{m}{n}$$

Esta definición de probabilidad fue definida por Laplace.

Un ejemplo de está fórmula sería la obtención de la probabilidad de sacar una reina de una baraja.

$$P(A) = P(\text{reina}) = \frac{4 \text{ reinas}}{52 \text{ cartas}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Un espacio muestral finito de probabilidad, donde cada punto muestral tiene la misma probabilidad se le conoce como *ESPACIO EQUIPROBABLE O UNIFORME.*

Un espacio muestral consta de todos los posibles resultados de un experimento. De esto deducimos que al

menos debe presentarse uno de estos en tal espacio muestral. En otras palabras la probabilidad del espacio muestral es 100 % o bien 1.00. Por otra parte, como todo evento A su complemento A^c tiene valor en lo referente a las posibilidades del espacio muestral se deduce que $P(A) + P(A^c) = 1.00$

En resumen

[a] La probabilidad de cualquier evento A se representa por medio de un valor que puede variar de 0 a 1.00

[b] La probabilidad representada por el espacio muestral es 100 % . P(Un evento en S) = 1.00

[c] La probabilidad de que un evento <u>no</u> ocurra es 1.00 menos la probabilidad de que si ocurra

$$1.00 - P(A) = P(A^c) \quad o \quad P(A) + P(A^c) = 1.00$$

Retornando a la definición clásica de probabilidad, observamos que la función de probabilidad definida por Laplace satisface las siguientes propiedades. Sea S un espacio muestral formado por n eventos elementales igualmente probables, entonces

((1)) Si A es un evento en S entonces $P(A) \geqslant 0$

Si un evento es imposible, tiene una probabilidad cero. Por ejemplo la probabilidad de obtener 10 puntos con solo tirar el dado en una sola ocasión es cero, puesto que no hay caras marcadas con el 10 en un dado común $P(A) = \frac{0}{6} = 0$. Si se desea obtener el número tres en una sola tirada del dado, se tiene que $P(A) = \frac{1}{6}$. Observe que este valor es menor que 1.

((2)) Para el espacio muestral S se tiene

$$P(S) = \frac{n}{n} = 1$$

La probabilidad de que aparezca una de las seis caras al tirar un dado es

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1$$

((3)) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplos de está propiedad pueden estudiarse en la serie de problemas al final de la presente sección.

DEFINICION DE PROBABILIDAD EN BASE A LA FRECUENCIA RELATIVA.

La definición clásica está limitada puesto que sólo se considera para situaciones en las que los resultados son igualmente probables.

El enfoque frecuencial es similar al enfoque clásico con la única diferencia de que aquí se efectuán más pruebas para obtener una mayor cantidad de datos y con ello obtener una mayor probabilidad, es decir, se basa en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de ensayos repetidos.

La probabilidad en este tipo de eventos se determina al considerar la experimentación correspondiente y esto conduce a tener un modelo de regularidad es-

tadística.

Esta definición de probabilidad que se basa en la frecuencia relativa viene dada por

$$P(A) = \frac{\text{NUMERO DE VECES QUE OCURRE A}}{\text{NUMERO TOTAL DE OBSERVACIONES}}$$

Cuando se emplea el enfoque frecuencial, es importante tomar en consideración lo siguiente

(a) La probabilidad obtenida de esa manera es únicamente una estimación del valor real. Si lanzamos una moneda al aire en 15 ocasiones y obtenemos 8 soles, esto no es garantía de que caerán 8 soles cada vez que se realicen 15 tiradas.

(b) Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, tanto mejor será la estimación de la probabilidad.

Por otra parte, esta definición de probabilidad frecuencial satisface las propiedades de la definición clásica, esto es

((1)) La frecuencia relativa de un evento cualquiera es un número positivo.

((2)) La frecuencia del evento seguro es la unidad.

((3)) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces la frecuencia relativa del evento $E = A \cup B$ es la suma de las frecuencias relativas de cada uno de los eventos.

DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD (KOLMOGOROV)

Una definición axiomatica fue propuesta por A.N.Kolmogorov relacionando la teoría de la probabilidad con la teoría de los conjuntos.

AXIOMAS DE PROBABILIDAD.

P - Se conoce como función de probabilidad.

P(A) - Se conoce como probabilidad del evento A

AXIOMA 1 Si A es un evento de S entonces la probabilidad del evento A es

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \qquad P(A) \in [0,1]$$

AXIOMA 2 Si el espacio muestral S se obtuvo de un exoerimento aleatorio, entonces

$$P(S) = 1$$

AXIOMA 3 Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si el conjunto de eventos es infinito

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \phi$$

entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Observar que esta definición axiomática se basa en las dos anteriores.

TEOREMAS.

Tomando en consideración los axiomas y la función de probabilidad se pueden considerar los siguientes teoremas.

TEOREMA 1 Probabilidad de un evento.

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

TEOREMA 2 Probabilidad de un evento imposible.

$$P(\phi) = 0$$

TEOREMA 3 Probabilidad de la unión de dos eventos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

TEOREMA 4 Probabilidad de la diferencia de A relativa a B.

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

TEOREMA 5 Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leqslant P(B)$

Para cualquiera A y B eventos de S.

EJEMPLOS.

[1] Sea el experimento de lanzar un dado y contar el número de puntos que aparecen en la cara superior. Determine su espacio muestral.

DEMOSTRACION

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

[2] Sea el experimento de lanzar una moneda al aire en una sola ocasión. Hallar su espacio muestral.

DEMOSTRACION.

$$S = \{A,S\}$$

[3] En una fabrica se construyen piezas mecánicas en una línea de producción y se cuenta el número de piezas con defectos producidas en un período de 30 días. Hallar su espacio muestral.

DEMOSTRACION.

$$S = \{0,1,2,\cdots,N\}$$

N = Número máximo de piezas que pueden ser producidas en 30 días.

[4] Sea el experimento de observar el funcionamiento de tres aparatos electrónicos durante una semana. Nos interesa saber el número de aparatos diferentes que se descompongan una o más veces durante la semana. Hallar el espacio muestral.

DEMOSTRACION.

$$S = \{0,1,2,3\}$$

Explicación.

Recuerde que un espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, por lo tanto

Resultado probable No. 1 Se descomponen cero aparatos

Resultado probable No. 2 Se descompone un aparato.

Resultado probable No. 3 Se descomponen dos aparatos.

Resultado probable No. 4 Se descomponen tres aparatos

[5] Se fabrica un foco especial para cierto tipo de proyectores. Antes de salir a la venta se analiza su "vida" en horas. Determinar su espacio muestral.

DEMOSTRACION.

$$S = \{0,1,2,\cdots,N\}$$

N = Número máximo de horas de duración del foco.

[6] Si se desea obtener el rey de diamantes de una baraja. Que espacio muestral debemos considerar.

DEMOSTRACION.

$$S = \{52 \text{ cartas}\}$$

[7] Si se tiene el experimento de lanzar un dardo en una diana. Nos interesa saber a que distancia se localiza de su centro, si su radio es de 12 cm.

DEMOSTRACION.

$$S = [0 \text{ cm}, 12 \text{ cm}]$$

[8] Se puede lanzar una moneda en 10 ocasiones y anotar en cuantas ocasiones cayó Sol. Hallar el

espacio muestral correspondiente.

DEMOSTRACION

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

[9] Si consideramos como un experimento el nacimiento de un pequeño, siendo los resultados niño o niña. Escribir el espacio muestral correspondiente.

DEMOSTRACION.

$$S = \{\text{niño , niña}\}$$

[10] Si se saca una canica de un cajón en donde hay 500, la probabilidad de obtener una cualquiera cuál es.

DEMOSTRACION.

Número de resultados posibles 500

Número de resultados favorables 1

$$P(\text{Una canica cualquiera}) = \frac{1}{500}$$

[11] Al tirar un dado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca un 2 en la cara superior?

DEMOSTRACION.

Número de resultados posibles 6

Número de resultados favorables 1

$$P = \frac{1}{6}$$

[12] Al tirar un dado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al caer se obtenga un número par?

DEMOSTRACION.

Número de resultados posibles 6

Número de resultados favorables 3

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

[13] Nueve cartones se marcan del 1 al 9 respectivamente. Si estos cartones se mezclan y se extrae uno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número anotado en ese pedazo sea par?

DEMOSTRACION.

Número total de resultados favorables 9

Número de resultados de A 4

$$P = \frac{4}{9}$$

[14] Supóngase que se tiene una urna con 10 pelotas de las cuales son 8 rojas y 2 verdes.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una pelota verde en el primer intento?.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de elegir una pelota roja en el primer intento?

DEMOSTRACION.

(a) $P(\text{verde}) = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5}$ (b) $P(\text{roja}) = \frac{8}{2+8} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

[15] Se tira una moneda en tres ocasiones ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos soles?

DEMOSTRACION.

Los ocho resultados favorables son:

SSS,SSA,SAS,ASS,SAA,ASA,AAS,AAA.

Número total de resultados favorables 8

Número de resultados favorables de A 3

$$P = \frac{3}{8}$$

[16] De una urna que contiene 6 bolas negras, 4 blancas y 5 azules, se extrae una al azar. Hallar la probabilidad de que sea (A) Negra (B) Blanca (C) Azul (D) No Negra (E) Negra o Blanca.

DEMOSTRACION.

Evento A. "Extracción de una bola negra"

Evento B. "Extracción de una bola blanca"

Evento C. "Extracción de una bola azul"

(A) $P(A) = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

(B) $P(B) = \frac{4}{15}$

(C) $P(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

(D) $P(A^c) = 1-P(A) = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(A^c)$ No Ocurrencia.

(E) Eventos mutuamente excluyentes.

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

[17] Si se lanza un dado en una sola ocasión, hallar la probabilidad de que

(a) En el dado aparece 4 o 6.

(c) En el dado aparece cualquier número par.

DEMOSTRACION.

(a) Los eventos A y B se definen como

A : "En el dado aparece 4"

B : "En el dado aparece 6"

Se busca la probabilidad del evento

$A \cup B$: "En el dado aparece 4 o 6"

A y B son mutuamente excluyentes debido a que no pueden obtenerse un 4 y un 6 al mismo tiempo.

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(b) Ahora definiremos los eventos de la siguiente forma

A : "En el dado aparece 2"

B : "En el dado aparece 4"

C : "En el dado aparece 6'

Se busca la probabilidad del evento

$P(A \cup B \cup C)$: "En el dado aparece 2 ó 4 ó 6"

Los eventos A, B y C son mutuamente excluyentes: ninguno de estos puede ocurrir al mismo

tiempo.

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

[18] Consideremos el lanzamiento de una moneda en 10 ocasiones. Si hay 8 águilas y 2 soles. ¿Cuál es la probabilidad en cada caso?

DEMOSTRACION.

(a) Número de veces que ocurre A 8

Número total de observaciones 10

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0.8 \quad \text{o bien} \quad 80\%$$

(b) Número de veces que ocurre A 2

Número total de observaciones 10

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0.2 \quad \text{o bien} \quad 20\%$$

[19] Si en una ciudad de 16000 habitantes se registrarón en un verano 40 casos de poliomielitis. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona determinada pudo contraer la enfermedad?

DEMOSTRACION.

Número total de observaciones 16000

Número de veces que ocurre A 40

$$P(A) = \frac{40}{16000} = .0025$$

[20] En un cruce de automóviles en Reforma, muestra que de cada 1000 vehículos que circulan, 600