de ellos dan vuelta a la derecha. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil de vuelta a la derecha en ese cruce?

DEMOSTRACION.

Número total de observaciones 1000

Número de veces que ocurre A 600

$$P(A) = \frac{600}{1000} = \frac{6}{10} = .60 \quad \text{o bien} \quad 60\%$$

[21] Los informes de un laboratorio indican que cuando a 25 conejos se les administraron dosis iguales de un fármaco, las lenguas de 20 de ellos adquirieron un color verde claro. ¿Cuál es la probabilidad de que esto nuevamente en condiciones idénticas?

DEMOSTRACION.

Número total de observaciones 25

Número de veces que ocurre A 20

$$P(A) = \frac{20}{25} = 0.80 \quad \text{o bien} \quad 80\%$$

Entonces es posible utilizar este porcentaje como una estimación de la probabilidad real de que este evento ocurra en condiciones similares.

[22] De 120 estudiantes, 60 estudian francés, 50 español y 20 estudian francés y español. Si se escoge un estudiante al azar hallar la pro-

babilidad de que el estudiante

(a) Estudie francés ó español.

(b) No estudie francés ni español.

DEMOSTRACION.

Evento A "Estudiantes de francés"

Evento B "Estudiantes de español"

Evento $A \cap B$ "Estudiantes de francés y español"

(a)

$$P(A) = \frac{60}{120} \qquad P(B) = \frac{50}{120} \qquad P(A \cap B) = \frac{20}{120}$$

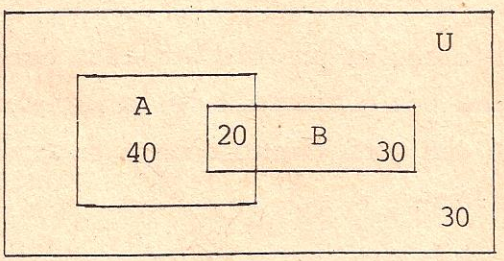
$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) =$$

$$= \frac{60}{120} + \frac{50}{120} - \frac{20}{120} = \frac{90}{120} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

(b)

$$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



[23] Entre los 200 profesores del departamento de

matemáticas hay 150 titulados, 60 del total dedican parte de su tiempo a trabajos de Algebra Lineal y 40 de los 150 titulados dedican parte de su tiempo a trabajos de Algebra Lineal. Si se toma al azar uno de estos profesores. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea titulado y no trabaje en Algebra Lineal?.

DEMOSTRACION.

200 - Profesores

150 - Titulados

60 - Se dedican al Algebra Lineal.

40 - Se dedican al Algebra Lineal y son titulados.

A - Titulados.

B - Que trabajan en Algebra Lineal.

Primero hallamos la probabilidad de que sea titulado y que trabaje en Algebra Lineal y posteriormente por complemento determinamos la probabilidad de que no sea titulado y no trabaje el Algebra Lineal.

Evento A "Profesor Titulado"

Evento B "Profesor dedicado al Algebra Lineal"

Evento $A \cap B$ "Profesor titulado y dedicado al Algebra Lineal"

Por lo tanto

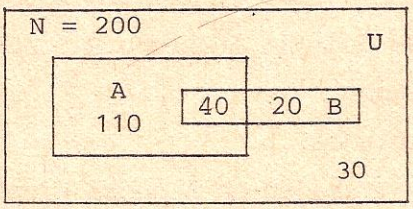
$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = \frac{150}{200} + \frac{60}{200} - \frac{40}{200} =$$

$$= \frac{170}{200} = \frac{17}{20} = 0.85$$

$P(A^C) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B)^C = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.85 = 0.15$

En consecuencia la probabilidad de que no sea titulado y no trabaje en Algebra Lineal es 0.15



[24] Arturo recibe una herencia de $10,000.00 y piensa emplear el dinero en una de las siguientes posibilidades. (1) Educación. (2) Ropa (3) Viaje. Las probabilidades de estas opciones son respectivamente 0.5,0.3 y 0.1. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que haga una de estas cosas? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que olvide estás tres posibilidades y gaste el dinero en otra cosa?.

DEMOSTRACION.

Evento A_1 - Educación

Evento A_2 - Ropa

Evento A_3 - Viaje

(a) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) =$

$= 0.5+0.3+0.1 = 0.9$

(b) Si $P(A_4) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

entonces

$P(A_4^c) = 1 - P(A_4) = 1 - 0.9 = 0.1$

[25] Tres atletas de natación A, B y C intervienen en una competencia. Los atletas A y B tienen la misma probabilidad de ganar y el doble de C. Hallar la probabilidad de que gane B o C.

DEMOSTRACION.

$P(A)+P(B)+P(C) = 1$

Sea $P(C) = P$

Por otro lado $P(A) = P(B) = 2P(C)$

en consecuencia

$2P+2P+P = 1 \qquad 5P = 1 \qquad P = \frac{1}{5}$

por lo tanto

$P(C) = P = \frac{1}{5}$

$P(B) = 2P = \frac{2}{5}$

finalmente $P(B \cup C) = P(B)+P(C) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

[26] Dado un experimento en el que

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ y $P(A^c) = \frac{5}{8}$

Determinar

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A \cap B^c)$

DEMOSTRACION.

(a) $P(S) = P(A \cup A^c)$

$1 = P(A) + P(A^c)$

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

(b) $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$P(B) = P(A \cup B)-P(A)+P(A \cap B) =$

$= \frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

(c) Por el Teorema 4

$P(A \cap B^c) = P(A)-P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$

[27] Sean los eventos $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

Hallar.

(a) $P(A^c)$ (b) $P(B^c)$ (c) $P(A \cap B)$

(d) $P(A^c \cap B^c)$ (e) $P(A^c \cup B^c)$

(f) $P(A-B) = P(A \cap B^c)$

(g) $P(B-A) = P(A^c \cap B)$

(h) $P[(A-B) \cup (B-A)]$ (i) $P(A^C \cup B)$

DEMOSTRACION.

(a) $P(A^C) = 1-P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ ó 50%

(b) $P(B^C) = 1-P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ ó 50%

(c) $P(A \cap B) = P(A)+P(B)-P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0.33$ ó 33.3%

(d) Empleamos Leyes de Morgan.

$P(A^C \cap B^C) = P(A \cup B)^C = 1 - P(A \cup B) =$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0.33$ ó 33.3%

(e) Empleamos Leyes de Morgan.

$P(A^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C = 1 - P(A \cap B) =$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.66$ ó 66.6%

(f) $P(A-B) = P(A \cap B^C) = P(B^C \cap A)$

Teorema 4

$P(B^C \cap A) = P(A)-P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(g) $P(B-A) = P(B \cap A^C) = P(A^C \cap B)$

Teorema 4

$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(h) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P[(A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)]$

$$= P(A \cap B^C) + P(B \cap A^C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(i) $P(A^C \cup B) = P(A \cap B^C)^C = 1 - P(A \cap B^C) =$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

[28] Sean los eventos A y B con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B^C) = \frac{5}{8}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Hallar

(a) $P(A \cap B)$ (b) $P(A^C \cap B^C)$ (c) $P(A^C \cup B^C)$

DEMOSTRACION.

(a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

sustituyendo

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{4+3-6}{8} = \frac{1}{8}$$

(b) Ley de Morgan $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

en consecuencia

$$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) =$$
$$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(c) Ley de Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

en consecuencia

$$P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B) =$$
$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

[29] ¿Es posible tener una asignación de probabilidad tal que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$?.

DEMOSTRACION.

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Despejando $P(A)$ de $P(A \cup B)$ y sustituyendo los valores correspondientes se tiene $P(A) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = P(A)+P(B)-P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{3}$$

Despejando $P(B)$ de $P(A \cap B)$ y sustituyendo los valores correspondientes se tiene $P(B) = \frac{1}{4}$
Entonces si es posible tener una asignación de probabilidad con los valores dados.

TECNICAS DE CONTEO.

Se mencionó en el capítulo anterior que un espacio muestral es el conjunto universal de todos los resultados posibles de un experimento.
Ahora trataremos el problema de obtener el número total de resultados posibles por medio de las diferentes técnicas de conteo, las cuales son

[a] Listar los resultados.
Este método es el que se utilizó en los temas que comprenden la primera parte de este libro, es decir, en Estadística Descriptiva.

[b] Diagramas de árbol.
Es por medio de una presentación gráfica, pero tiene sus inconvenientes cuando se tiene un número considerable de resultados.

[c] Fórmulas Matemáticas.
(a) Ley Fundamental de la Multiplicación.
(b) Permutaciones.
(c) Combinaciones.

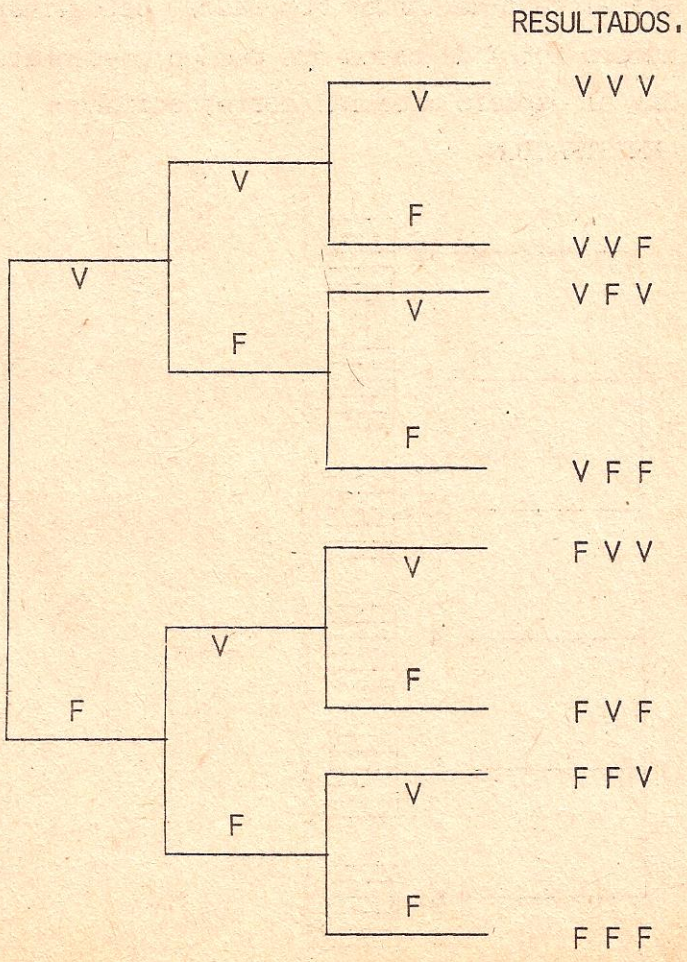
DIAGRAMAS DE ARBOL.

Los siguientes ejemplos nos ilustraran en forma clara y precisa, la utilidad de los diagramas de árbol.
EJEMPLOS.

[1] Un estudiante presenta un examen de preguntas de verdadero-falso. Dar el diagrama de árbol para las tres primeras preguntas y escribir su espacio muestral.

DEMOSTRACION.

Como el estudiante tiene dos opciones posibles para cada pregunta V ó F, el árbol presenta 2 ramas en cada pregunta.



El espacio muestral de este evento es

S = {VVV,VVF,VFV,VFF,FVV,FVF,FFV,FFF}

El espacio muestral para dos preguntas sería

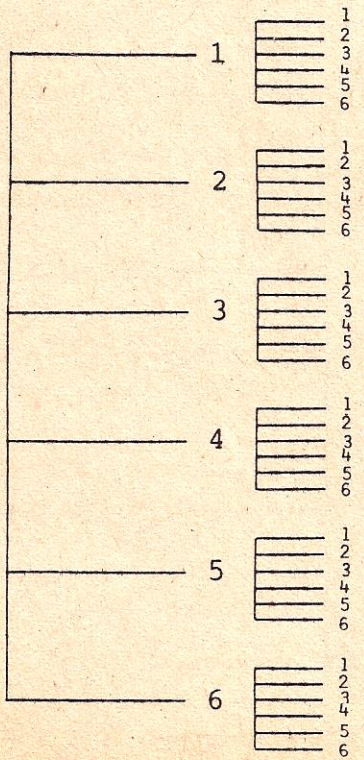
S = {VV,VF,FV,FF}

El espacio muestral para una pregunta es

S = {V,F}

[2] Sea el caso de lanzar dos dados. Determinar el número total de casos que pueden presentarse. Dar el espacio muestral correspondiente.

DEMOSTRACION.



El espacio muestral de este experimento es

S = {(11),(12),(13),(14),(15),(16)
(21),(22),(23),(24),(25),(26)
(31),(32),(33),(34),(35),(36)
(41),(42),(43),(44),(45),(46)
(51),(52),(53),(54),(55),(56)
(61),(62),(63),(64),(65),(66)}

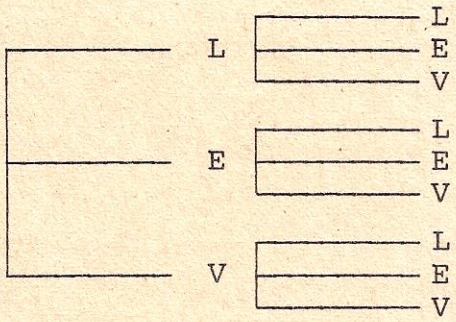
Otro método para obtener el espacio muestral anterior es aplicando el concepto de Producto Cartesiano.

El espacio muestral de un dado es

S = {1,2,3,4,5,6}

[3] Obtener todos los resultados posibles para los dos primeros partidos de la Quiniela del Futbol Mexicano. Escribir su espacio muestral.

DEMOSTRACION.



L - LOCAL

E - EMPATE

V - VISITANTE

El espacio muestral para los dos partidos es

S = {LL,LE,LV,EL,EE,EV,VL,VE,VV}

El espacio muestral para un partido es

S = {L,E,V}

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE MULTIPLICACION.

Si un evento A_1 puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si continuando el procedimiento, un segundo evento A_2 puede realizarse de n_2 maneras diferentes, y si después de efectuados los dos eventos anteriores, un tercer evento A_3 puede realizarse de n_3 maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el *PRODUCTO* de $n_1 n_2 n_3 \ldots\ldots$

Aplicamos lo anterior.

Supongamos que se va a viajar de la Ciudad de MEXICO a GUADALAJARA pasando por QUERETARO y por IRAPUATO de la siguiente forma:

Cd. de MEXICO a QUERETARO	QUERETARO a IRAPUATO	IRAPUATO a GUADALAJARA
A_1	A_2	A_3
Bicicleta (A)	Automovil (U)	Avión (X)
Helicóptero (B)	Caballo (V)	Caminando (Y)
Motocicleta (C)	Tren (W)	
Camión (D)		

El total de maneras de como se puede viajar de la Ciudad de México a Guadalajara es

$n_1 = 4$

$n_2 = 3$ $\qquad n_1 n_2 n_3 = (4)(3)(2) = 24$

$n_3 = 2$

Por consiguiente el espacio muestral debe contener 24 opciones para viajar de una ciudad a la otra. Se podría hacer una tabla de las 24 trayectorias o bien un diagrama de árbol. Esto sería útil en una agencia de viajes.

Si el número de maneras como se pueden efectuar cada uno de los eventos $A_1A_2A_3$, es uno mismo, esto es, si el número de maneras como se va a viajar es cuatro para A_1, cuatro para A_2 y cuatro para A_3, el número total de maneras será

$$n_1 n_2 n_3 = (4)(4)(4) = 4^3 = 64$$

Esto se puede expresar como

$$n_1 n_2 n_3 = n \quad \text{donde} \quad n = 4 \text{ opciones}, \quad r = 3 \text{ decisiones secuenciales.}$$

En términos generales, de haber r decisiones secuenciales, cada una con n opciones, el número total de resultados posibles es

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r$$

Ahora emplearemos estos resultados para los siguien-

tes ejemplos.

[1] Se lanza una moneda cuatro veces. Hallar el número total de resultados posibles.

DEMOSTRACION.

$n = 2$ $\quad 2^4 = 16$ Resultados posibles.

$r = 4$

[2] Un estudiante presenta un examen de 20 preguntas de verdadero-falso. Cuantas maneras existen para resolver el examen.

DEMOSTRACION.

Para una pregunta tiene 2 opciones $2^1 = 2$

Para 2 preguntas tiene 2 opciones $2^2 = 4$

Para 3 preguntas tiene 2 opciones $2^3 = 8$

.....

Para 20 preguntas tiene 2 opciones 2^{20}

$n = 2$ Número de opciones.

$r = 20$ Decisiones secuenciales

$2^{20} = 1,048,576$

[3] Sea el caso de lanzar un dado dos veces.

DEMOSTRACION.

$n = 6$ $\quad 6^2 = 36$ Resultados posibles.

$r = 2$

[4] Obtener todos los resultados posibles para los tres primeros partidos de la Quiniela del futbol mexicano.

DEMOSTRACION

$n = 3$ $\qquad 3^3 = (3)(3)(3) = 27$

$r = 3$

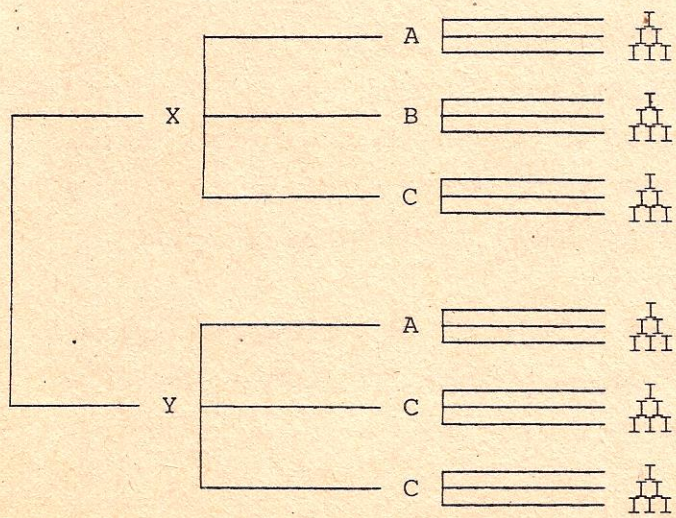
[5] La carta del restaurante OAXACA ofrece a escoger Sopa(X) o Consomé(Y) para iniciar; Mole(A) Carne(B) y Mariscos(C) como plato principal y Flan(I), Pastel(II) o Fruta(III) a elegir como postre.

La comida completa consta de tres platos elegidos de cada una de las tres clases. ¿Cuál es el espacio muestral? Construir un diagrama de árbol para representar el espacio muestral de todas las comidas completas posibles.

DEMOSTRACION.

$n_1 = 2 \quad n_2 = 3 \quad n_3 = 3 \quad n_1 n_2 n_3 = (2)(3)(3)$

$= 18$ maneras.



PERMUTACIONES.

Hay dos técnicas importantes que se basan en el principio de multiplicación las cuales son: Permutaciones y Combinaciones.

Cuando el *ORDEN* en que se disponen los términos es importante, el número total de resultados posibles recibe el nombre de *PERMUTACION*.

Se llama *ORDENACION* (r) de los elementos de un conjunto (n) una disposición ordenada de los mismos.

Por ejemplo, si se tienen 5 candidatos (n = 5) a tres cargos (r = 3) de una empresa los cuales son: (P) Presidente, (G) Gerente y (T) Tesorero ¿De cuantas maneras se pueden ocupar estos tres cargos?

CARGOS	P G T	
MANERA DE OCUPARLOS	(5).(4).(3) = 60	Número total de maneras para ocupar los 3 cargos.

El cargo de Presidente lo podría ocupar cualquiera de las cinco personas, esto es, hay cinco maneras de ocupar el cargo de Presidente. Cuando esto sucede, hay cuatro maneras de ocupar el siguiente cargo y por consiguiente habrá tres maneras de ocupar el tercer cargo.

En general una *PERMUTACION* de r elementos ordenados entre los n elementos dados, se representa por ${}_nP_r$ y viene dado por

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

donde

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3(2)(1)$$

y por definición

$$0! = 1$$

Aplicando esto al ejemplo anterior, se tiene que

$n = 5$

$r = 3$

$$_nP_r = {}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{(5)(4)(3)(2!)}{2!}$$

$$= (5)(4)(3) = 60$$

Notar que en la primera parte se utilizó el principio de multiplicación y en está segunda parte la fórmula. Ahora si se tiene que $n = r$, es decir $n-r = 0$ la fórmula se reduce a

$$_nP_n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Se dice que si el número de elementos que se van a tomar y ordenar, es el mismo número total de n elementos disponibles, el total de las permutaciones es simplemente n! y en tal caso se llaman permutaciones de los n elementos.

En el ejemplo anterior se tiene que si para los tres cargos hay tres elementos, la forma de ocuparlos es

$n = 3$

$r = 3$

$$_3P_3 = 3! = (3)(2)(1) = 6$$

A - PRIMERA PERSONA.

B - SEGUNDA PERSONA.

C - TERCERA PERSONA.

P	G	T
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

En consecuancia toda permutación depende de una ordenación de elementos.

El espacio muestral es el conjunto de todas las permutaciones tomando en consideración el orden. Para el ejemplo anterior se tiene que para el primer caso, el espacio muestral es igual a 60 mientras que para el caso en el cual $n = r$, el espacio muestral es 6. Recuerde que son el número total de resultados posibles.

PERMUTACIONES CON REPETICIONES.

Ocasionalmente tendremos elementos idénticos. Para este tipo de problemas, el número de permutaciones que se pueden distinguir en el caso de n elementos, cuando hay n_1 elementos imposibles de reconocer de un tipo, n_2 de otro tipo, etc. es

$$ {}_nP_{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!} $$

donde $n = n_1+n_2+\ldots+n_r$

PRUEBAS ORDENADAS.